TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 190-Março-1949

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º
LISBOA

União Eléctrica Portuguesa

S. A. R. L.

SEDE
Rua Duque de Loulé, 240 — Pôrto
Telef. 2828 — 2829 — 2830 — Est. 90

DELEGAÇÃO
R. António Maria Cardoso, 13, 2.º-Lisboa
Telefones 27232 — 27233 — Est. 365

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

A **União Eléctrica Portuguesa** distribui e vende electricidade nos **distritos** de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU LEIRIA e de SETÚBAL, pela mais extensa rêde de alta tensão em Portugal (mais de 1.200 kms), levando fôrça motriz às FÁBRICAS e luz a CIDADES, VILAS, ALDEIAS e LUGARES

A **U. E. P.** facilita a electrificação de Fábricas e oferece as maiores vantagens nas suas tarifas

Consultar a **U. E. P.** e consumir a sua energia é **proveitoso negócio**

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de todas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia **"CIMENTO TEJO"**

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.º

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.º
PORTO

NÚMERO
190
Março — 1949

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 70144 (linha 50)

BIBLIOTECA I.S.T.

DIRECTOR
HENRIQUE ESTÁCIO MARQUES

ADMINISTRADOR
JOSÉ MARIA AVILLEZ

BIBLIOTECÁRIO
HORÁCIO DE CAMPOS NETO

SECRETÁRIO
LUÍZ DA CUNHA FERRAZ

CORPO REDACTORIAL
JOÃO A. A. JUSTO
JOSÉ PIRES CASTANHO
DUARTE N. MENDES DA COSTA

NÚMERO AVULSO 9$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	25$00	45$00	85$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	50$00	90$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

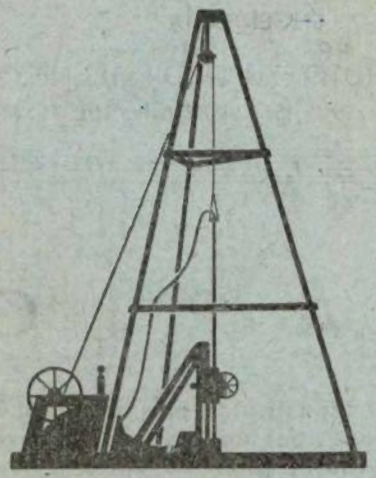
SUMÁRIO

CAPA — PONTE DE ODELEITE, constituída por tramos metálicos formando vigas contínuas de 3 tramos aproveitados da ponte de caminho de ferro do Vale de Mu

		Págs.
A organização do Curso Geral do Instituto Superior Técnico	Eng.º Luís A. de Almeida Alves	249
Engenheiro João Lopes Raimundo		268
Linhas de transmissão de energia eléctrica em corrente alternada. Regime forçado	Eng.º António A. de Carvalho Fernandes	271
Centrifugação	Eng.º Luís A. de Almeida Alves	286
Processos unitários da química orgânica. — Nitração	Eng.º Manuel Chagas Roquette	293
Turbinas hidráulicas	António Júlio de Sousa Lage	300
Tipos modernos de transmissões		304
O apetrechamento dos Laboratórios de Química do I. S. T.	Vítor Pinto Pinheiro	314
Relatório da Direcção da «Técnica» no ano de 1946-47		319
Biblioteca		322

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

SONDAGENS RODIO, Limitada



RODIO

Sondagens geológicas, estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geotécnico

Pesquisas de água.

Consolidação e impermeabilização de terrenos e de obras por meio de injecções de cimento, produtos químicos, argila activada, emulsão betuminosa Shellperm, etc.

Estacas de betão armado, sistema **Ródio** moldadas no solo sem trepidações.

Rebocos comprimidos por «**cement gun**»

Fundações em terrenos difíceis quer por congelação artificial, quer por abaixamento do lençol de água.

As melhores referências no país e no estrangeiro

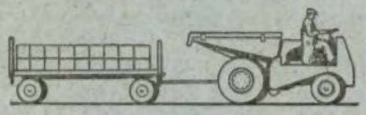
Sócio gerente residente em Portugal:
Walter Weyermann, Eng. civil

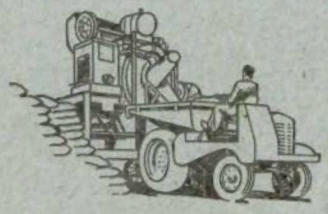
R. S. Mamede ao Caldas, 22, 3.º — LISBOA

Tel. 2 8685

MUIR-HILL DUMPER

TRANSPORTADORES BASCULANTES COM COMANDO ROTATIVO





O método mais económico de transportar materiais a granel, como podem comprovar as unidades já ao serviço em Portugal

///

OS REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

HENRY M. F. HATHERLY, L.DA

RUA DO COMÉRCIO, 8

Telefones 2 2001 e 2 6633 — LISBOA

vos fornecerão todos os detalhes e as suas propostas para entregas rápidas

AMSLER

MÁQUINAS PARA ENSAIO DE MATERIAIS
APARELHOS HIDROMÉTRICOS, PLANÍMETROS, ETC.

PRECISÃO **ROBUSTEZ**

COMPROVADAS POR MUITAS CENTENAS DE DISPOSITIVOS

e máquinas de ensaio, para a fabricação e para a construção, espalhados por todo o mundo. Experiência quase centenária

Máquinas de tracção e compressão
» » flexão e torção
» » dureza e fadiga
» » choque (martelos pendulares)
Dinamómetros hidráulicos
Aparelhos para aferir manómetros
Dinamómetros de torção para potências
Prensas para ensaios de cimentos
Máquinas para ensaio de madeiras e materiais de construção
Vagões-dinamómetros
Molinetes e Limnígrafos
Planímetros. Integradores
Dilatómetros industriais

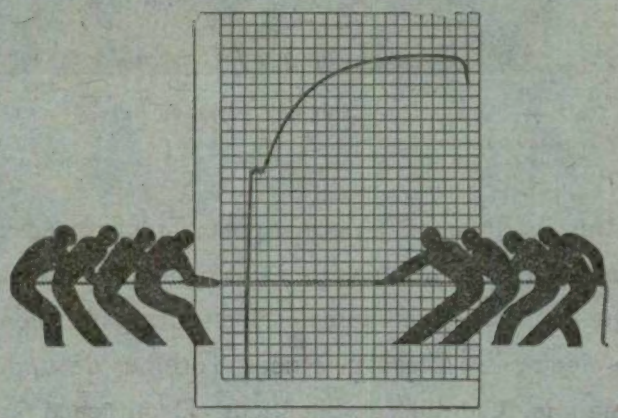


Diagrama de tracção

CATÁLOGOS E LISTA DOS COMPRADORES PORTUGUESES À DISPOSIÇÃO DOS INTERESSADOS

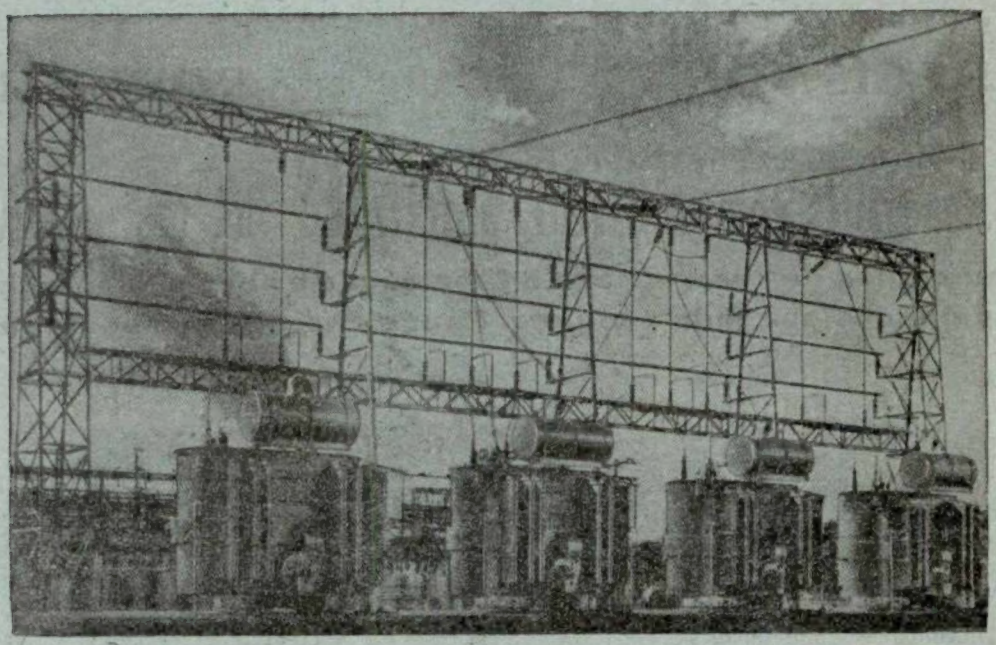
Representantes exclusivos para Portugal e Colónias :

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA
R. EUGÉNIO DOS SANTOS, 75 TELEF. 2 4314/15 LISBOA

AMSLER
SCHAFFHOUSE

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Sub-estação ao ar livre de 25.000 KVA, 220.000 volts

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, S. A. R. L.

LISBOA

Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

AUTOMÁTICA ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

Séde — AV. ANTÓNIO AUGUSTO AGUIAR, 19-3.º
Fábrica — RUA DO TELHAL AOS OLIVAIS } LISBOA

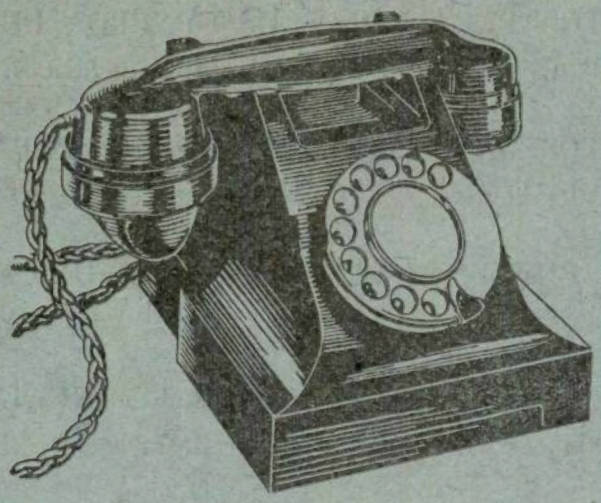
BIBLIOTECA I. S. T.

A primeira Fábrica de Telefones em Portugal

Fornecedores: Da *Administração Geral dos Correios, Telégrafos e Telefones:* para a automatização do sistema telefónico do País.

Do *Ministério das Colónias:* para a automatização do sistema telefónico das cidades de Luanda, Lourenço Marques, e Beira.

Da *Companhia dos Telefones:* para todo o sistema telefónico das cidades de Lisboa e Porto.



Desde 1947 que os aparelhos telefónicos adquiridos pela Administração Geral dos Correios, Telégrafos e Telefones e pela The Anglo Portuguese Telephone Cº, Ltd., são fabricados em Portugal na FÁBRICA da AUTOMÁTICA ELÉCTRICA e por mão de obra inteiramente Portuguesa.

associada da

AUTOMATIC TELEPHONE & ELECTRIC Cº LTD.

LONDRES ATM **LIVERPOOL**

Standard Electrica

ASSOCIADA

DA

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORP

- EQUIPAMENTOS PARA TODOS OS GÉNEROS DE COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS por rádio e por circuitos metálicos.
- EQUIPAMENTOS DE TODAS AS POTÊNCIAS PARA RADIODIFUSÃO E TELEVISAO.
- GRANDES E PEQUENAS CENTRAIS TELEFONICAS, manuais e automáticas.
- TODO O GÉNERO DE APARELHAGEM MANUAL E AUTOMÁTICA para instalações telefónicas e telegráficas.
- FORNOS ELÉCTRICOS desde pequenas potências, com aquecimento por correntes de radiofreqüência.
- SISTEMAS PATENTEADOS, DE ANTENAS de alta eficiência.
- CABOS DE TODOS OS TIPOS para comunicações em tôdas as freqüências e para transporte de energia.

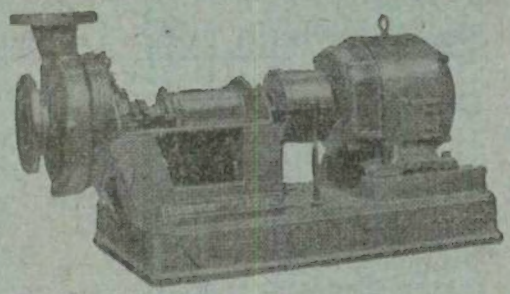
Telefone 2 3111/2/3 Rua Augusta, 27 LISBOA

ESCAVADORAS E GARRAS «PRIESTMAN»

BOMBAS E GRUPOS MOTOBOMBAS

(THE PULSOMETER ENGINEERING CO)

De todos os tipos e capacidades,
para instalações industriais,
irrigações, docas, etc.



Representantes exclusivos:

E. PINTO BASTO & C.ª L.DA

Stand de Exposições: Trav. dos Remolares, 5 — LISBOA

No Porto: KENDALL, PINTO BASTO & C.ª, L.DA

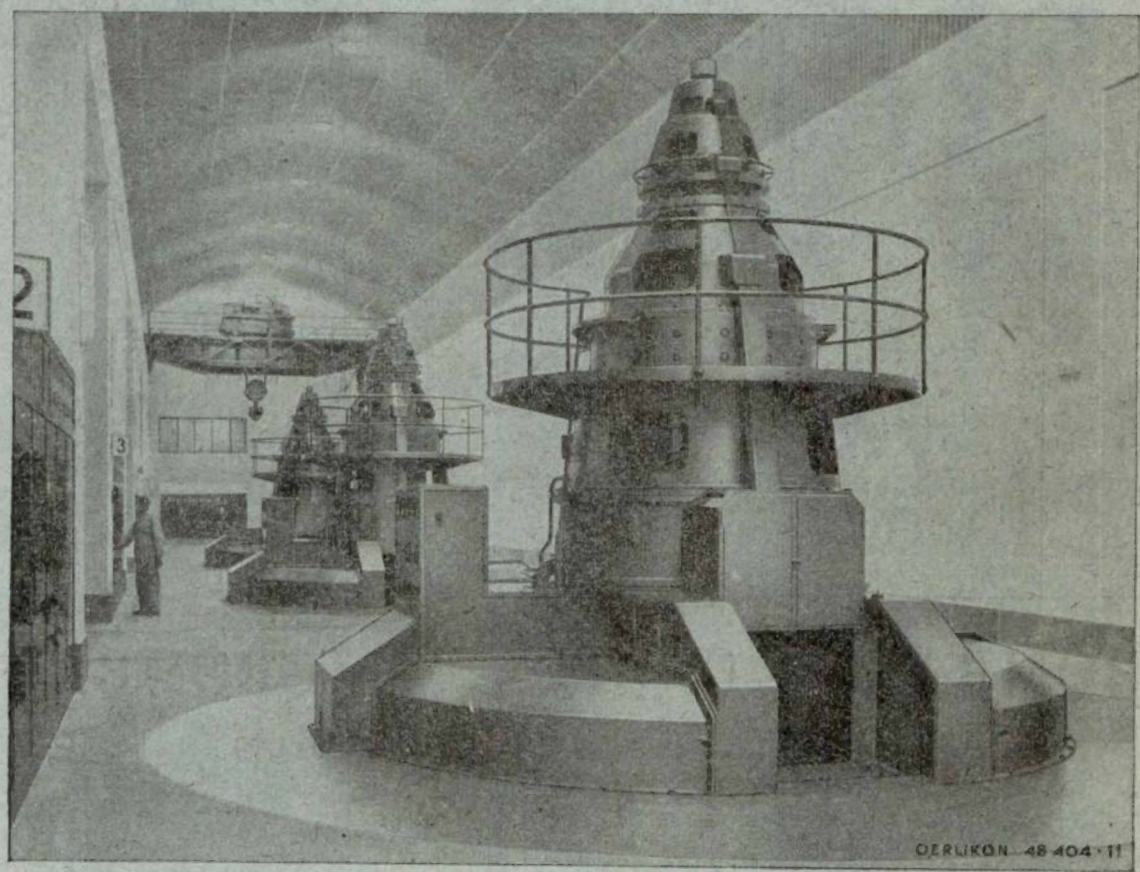
OERLIKON

Máquinas e aparelhos eléctricos de todo o género

Representante Geral para Portugal e Colónias

P. BELLASI

Porto // Rua Sá da Bandeira, 494, 3.° // Telefone 21968



Central subterrânea de Innertkirchen (Suíça), equipada com três alternadores Oerlikon, de 52.250 kVA 428 r. p. m., cada um. Estes alternadores verticais são os geradores mais potentes da Suíça

PRODUTOS OERLIKON

Equipamentos eléctricos completos para centrais termo e hidroeléctricas, subestações e instalações de distribuição. Accionamentos eléctricos especiais para todas as indústrias. Geradores, motores, transformadores, reguladores de indução, comutadores, rectificadores de vapor de mercúrio, equipamentos para soldadura eléctrica por arco. Electrolizadores para a produção de hidrogénio e oxigénio. Aparelhos de manobra e protecção para alta e baixa tensão, reguladores automáticos de tensão, relés, pára-raios. Turbinas de vapor e turbo-geradores, ponte-gruas, compressores. Equipamentos eléctricos para locomotivas, automotoras, veículos diesel-eléctricos, locomotivas de acumuladores, tranvias, troleibus, funiculares e teleféricos, etc.

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON

ZURICH-OERLIKON (SUIÇA)

TÉCNICA

HENRIQUE ESTÁCIO MARQUES

DIRECTOR

ANO XXV - N.º 190 MARÇO 1949

A ORGANIZAÇÃO DO CURSO GERAL DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES

Assistente do I. S. T.

C. D. 62.0 (077)

INTRODUÇÃO

Em dois artigos publicados recentemente na «Técnica» (1), com os títulos «A Orgânica das Aulas Práticas do Instituto Superior Técnico» e «A Estruturação Teórica do Curso de Engenharia Química», tentou-se definir, por um processo dedutivo, qual deveria ser a orientação a dar ao Curso Geral e ao Curso de Química do I. S. T., estabelecendo simultâneamente as normas de funcionamento das aulas práticas, com o objectivo de lhes garantir a eficiência exigida pelas necessidades do ensino.

O estudo que se fez limitou-se, simplesmente, a uma análise em linhas gerais e, portanto, os resultados que se obtiveram não representam senão um esquema sem condições de aplicação directa; por isso, o trabalho feito pode considerar-se como pràticamente inútil, se o esquema obtido não for utilizado criteriosamente, aplicando-o à organização dos programas dos cursos e ao estabelecimento dos horários das aulas.

Como se disse nos artigos mencionados, o estudo prático da organização dos programas já tinha sido feito (2), embora com um espírito um pouco diferente e sem preocupações de grande rigor; parecia, portanto, haver vantagem em publicar esse estudo, convenientemente modificado, de modo a dar uma ideia da possibilidade de utilização imediata do esquema geral que se apresentou.

A esta publicação opunha-se, até certo ponto, a preocupação referida no primeiro dos artigos citados, de evitar, tanto quanto possível, «tratar com detalhe problemas internos do Instituto». No entanto, e anàlogamente ao que se diz no prefácio das folhas de Química Tecnológica (I parte) (3) a respeito da sua publicação imediata, entendeu-se que «os inconvenientes que daí podem resultar são suficientemente compensados pelas vantagens de não perder tempo e estas, neste caso, sobrepõem-se nìtidamente a considerações de qualquer outra natureza».

(1) N.os 184 e 186.

(2) «Esboço para uma Possível Reorganização do Curso de Engenharia Química do I. S. T.».

(3) Publicadas pela Associação dos Estudantes do I. S. T., 1948-49.

Não se deve, porém, empreender um trabalho desta índole, sem, prèviamente, chamar a atenção para um ponto que, se não for suficientemente esclarecido pode induzir em erro, na interpretação dos objectivos que se pretende atingir. Trata-se do seguinte:

Pode admitir-se que entre o grau de pormenorização com que um assnnto é estudado e a aceitação dos resultados desse estudo, há uma relação do tipo do *princípio da incerteza* de Heisenberg, o que significa que, à medida que se pretende pormenorizar o estudo, maior vai sendo a dificuldade de conseguir um acordo geral, para as soluções apresentadas. Como consequência imediata, pode concluir-se que a finalidade do que se segue não é apresentar *a solução* do problema, mas, simplesmente, *uma das várias soluções possíveis,* dentro da estruturação rígida que já foi definida; por isso mesmo, o estudo que se vai fazer tem o carácter de *sugestão* e não de *imposição.*

A possibilidade da existência de diferentes soluções, determinadas pelo coeficiente pessoal de quem as apresenta, pode dar origem a que o assunto venha a ser largamente discutido na «Técnica»; parece não haver inconveniente nisso, não só por se criarem elementos para um estudo comparativo, mas também, para esclarecer os alunos sobre a importância do problema em discussão ([1]).

* * *

Como já se disse, o estudo vai ser baseado rigorosamente nos dois artigos atrás citados, o que, além de tornar a exposição mais simples e mais concreta, permite precisar melhor os pontos que eventualmente venham a ser discutidos. Por outro lado, vai haver a preocupação de adaptar as conclusões a que se chegar, tanto quanto possível, à organização actual do Instituto; conseguir-se-á, deste modo, dedicar maior atenção aos assuntos que, na verdade, precisem de ser modificados e facilitar o trabalho de execução de qualquer reforma que, porventura, venha a efectuar-se, num futuro mais ou menos próximo.

Deve notar-se que não se vai partir do curso actual, para lhe introduzir modificações, porque, por este processo, não se consegue dominar o problema em toda a sua generalidade; pelo contrário, vai estabelecer-se, dedutivamente, uma determinada estruturação, a qual se fará coincidir com os actuais programas, nos pontos em que se verifique haver a mesma orientação.

Por uma questão de sistematização dos resultados, o presente artigo refere-se exclusivamente à Organização do Curso Geral, deixando-se para o seguinte a Organização do Curso de Química.

* * *

Em minha opinião, considero como fundamental a aceitação de dois postulados, cuja necessidade foi demonstrada no primeiro dos artigos citados:

1) As aulas práticas devem ter fundamentalmente funções de aulas de estudo.

2) O ano lectivo tem de ser dividido em dois semestres independentes, tendo entre si um intervalo de 40 dias, para efectuar os exames do primeiro semestre.

([1]) A participação dos alunos na discussão do problema, tem relativamente pouco interesse, não só porque veem as questões muito de perto, e portanto, deformadas, mas, também e principalmente, porque lhes falta o conhecimento dos imperativos da vida profissional.

BIBLIOTECA I.S.T.

CAPITULO I

ESCOLHA DO PROGRAMA DO CURSO GERAL

a) *Generalidades*

Como se mostrou no artigo sobre «A Orgânica das Aulas Práticas do Instituto Superior Técnico», os quatro assuntos básicos dos cursos de Engenharia (Resistência de Materiais, Dinâmica dos Fluidos, Teoria do Calor e das Máquinas Térmicas, Teoria da Electricidade e das Máquinas Eléctricas) baseiam-se num certo número de conhecimentos gerais, que se transcrevem, embora por uma ordem diferente, por uma questão de conveniência:

Integrais múltiplos, de superfície e curvilíneos
Diferenciais totais
Equações diferenciais ordinárias
Equações às derivadas parciais de 2.ª ordem (equação de Monge, equação do calor)
Séries de Fourier
Cálculo operacional
Cálculo das variações
Equações integrais
Complexos
Funções analíticas
Problemas de contorno
Sistemas de vectores axiais
Cálculo vectorial diferencial e integral
Quádricas e cónicas
Centros de gravidade e momentos de inércia
Elipsóides de inércia e elipses de inércia
Tensores
Probabilidades
Cinemática dos sólidos
Movimentos cicloidais
Mecanismos
Estática dos sólidos
Dinâmica dos sólidos com um eixo fixo
Polígonos funiculares
Estática gráfica
Curvas Funiculares
Catenária
Tensões e flechas nos cabos aéreos
Atrito
Análise dimensional
Termodinâmica de gases e vapores
Teoria cinética dos gases
Equações dos gases perfeitos e de Van der Walls
Campo electrostático e magnetostático
Campo electromagnético
Ondas electromagnéticas
Harmónicas
Elasticidade

Movimento de fluidos, perdas de carga, número de Reynolds
Resistência de um fluido ao movimento de um sólido
Transmissão de calor por condução
Transmissão de calor por convecção, número de Prandtl
Orgãos de máquinas

Cada um destes conhecimentos teria de ser decomposto nos seus fundamentos, a fim de determinar, completamente, todos os assuntos a estudar; mas, como essa decomposição é demorada, apresentam-se simplesmente os resultados, que, fundamentalmente, se sintetizam em 5 semestres de Matemática e 3 semestres de Física.

Nesses resultados, indicam-se aproximadamente os números de aulas a dedicar aos diferentes assuntos, para dar uma ideia do grau de desenvolvimento de cada um.

a) *Matemática*

1.ª PARTE

Funções de uma variável	3 aulas
Infinitésimos	1 aula
Limites	2 aulas
Funções limitadas	1 aula
Continuidade	2 aulas
Derivadas	3 aulas
Crescimento e decrescimento. Estacionaridade	1 aula
Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy	1 aula
Fórmulas de Taylor e de Mc Laurin	1 aula
Conclusão do problema da estacionaridade. Concavidade. Pontos de inflexão e de ondulação	3 aulas
Indeterminações	2 aulas
Determinantes	5 aulas
Sistemas de equações lineares	2 aulas
Complexos	5 aulas
Séries numéricas	4 aulas
Desenvolvimentos em série	4 aulas
Total	40 aulas

2.ª PARTE

Classificação das funções algébricas	1 aula
Polinómios inteiros	2 aulas
Resolução de equações e sistemas de grau superior ao segundo	3 aulas
Fracções racionais. Decomposição	1 aula
Transcendentes elementares	3 aulas
Vectores. Produto interno. Produto externo. Produto misto. Duplo produto externo	4 aulas
Momentos de vectores em relação a um ponto e a um eixo. Sistemas de vectores. Redução de sistemas	4 aulas
Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Recta no plano e no espaço. Área de um triângulo	2 aulas
Plano	1 aula

Recta e plano. Feixes de planos. Distância entre dois pontos. Angulo de dois planos. Angulo de uma recta e de um plano. Perpendicularidade e paralelismo. Distância de um ponto a uma recta. Distância de um ponto a um plano. Equação normal do plano. Plano bissector. Volume de um tetraedro. Distância de duas rectas no espaço . . . . . 4 aulas

Elementos do infinito e imaginários. Coordenadas obliquas. Transformação de coordenadas . . . . . 3 aulas

Curvas planas . . . . . 1 aula

Cónicas. Discussão . . . . . 3 aulas

Curvas usuais em coordenadas cartesianas e polares . . . . . 1 aula

Polos e Polares . . . . . 1 aula

Quádricas. Discussão . . . . . 4 aulas

Outras superfícies no espaço . . . . . 2 aulas

Total . . . 40 aulas

3.ª PARTE

Derivadas de determinantes . . . . . 1 aula

Derivadas parciais. Funções homogéneas. Teorema de Euler. Funções implícitas. Teorema de existência. Jacobianos. Independência funcional. Estacionaridade. Estacionaridade condicionada. Fórmula de Taylor a duas variáveis . . . . . 6 aulas

Mudanças de variável . . . . . 1 aula

Integrais indefinidos . . . . . 5 aulas

Integral definido à Riemann e à Lebesgue . . . . . 3 aulas

Propriedades do integral à Riemann. Teorema fundamental do cálculo integral. Regra de Barrow. Desigualdade de Schwartz. Integração por séries . . . . . 2 aulas

Integrais paramétricos. Teoremas da média . . . . . 1 aula

Integrais impróprios . . . . . 2 aulas

Integração aproximada . . . . . 1 aula

Integração gráfica. Planímetro . . . . . 1 aula

Diferenciais totais. Integrais múltiplos. Mudanças de variável . . . 2 aulas

Integrais duplos. Teorema de Riemann . . . . . 1 aula

Integrais de superfície. Teoremas de Ostrogradsky, de Green e de Stokes . . . . . 1 aula

Cálculo vectorial, diferencial e integral. Gradiante, divergência e rotação. Potencial . . . . . 3 aulas

Aplicações à hidráulica, à electrostática, à magnetostática e ao electromagnetismo . . . . . 2 aulas

Áreas, volumes e comprimentos . . . . . 1 aula

Centros de gravidade . . . . . 2 aulas

Momentos de inércia . . . . . 3 aulas

Potenciais . . . . . 2 aulas

Total . . . 40 aulas

4.ª PARTE

Geometria diferencial. Triedro de Frenet. Tangente. Plano normal. Plano osculador. Normal. Binormal. Plano rectificante. Curvatura

de flexão e de torsão. Curvas no espaço. Tangente. Plano normal. Centro de curvatura. Curvas planas. Tangente e normal. Centro de curvatura. Tangentes passando por um ponto exterior. Tangentes a duas curvas. Hesseano. Evoluta e evolvente. Assíntotas. Pontos singulares. Envolventes. Curvas torsas. Superfícies. Equação cartesiana e equações paramétricas. Envolventes de famílias de superfícies. Superfícies planificáveis. Superfícies cilíndricas. Superfícies cónicas. Comprimento de arco sobre uma superfície. Geodésicas . . . . . 7 aulas

Equações diferenciais ordinárias de 1.ª ordem . . . . . 3 aulas

Sistemas. Equações de ordem superior à primeira. Equações diferenciais totais . . . . . 8 aulas

Equação de Bessel . . . . . 2 aulas

Equações às derivadas parciais de 1.ª ordem . . . . . 2 aulas

Equações às derivadas parciais de 2.ª ordem . . . . . 2 aulas

Séries de Fourier . . . . . 1 aula

Integração da equação do calor. Condições aos limites. Aplicação das séries de Fourier. Aplicação à transmissão de calor e à difusão 2 aulas

Cálculo operacioal . . . . . 2 aulas

Cálculo das variações. . . . . 4 aulas

Equações integrais . . . . . 2 aulas

Funções analíticas. Problemas de contorno . . . . . 3 aulas

Funções elípticas . . . . . 2 aulas

Total . . . 40 aulas

5.ª PARTE

Cinemática do ponto . . . . . 3 aulas

Cinemática dos sólidos . . . . . 3 aulas

Movimentos relativos . . . . . 2 aulas

Movimentos cicloidais. Mecanismos . . . . . 4 aulas

Mecânica. Generalidades . . . . . 2 aulas

Funções dinâmicas . . . . . 4 aulas

Dinâmicas dos sistemas livres . . . . . 6 aulas

Dinâmicas dos sistemas sujeitos a ligações . . . . . 2 aulas

Estabilidade e instabilidade do equilíbrio . . . . . 1 aula

Dinâmica do ponto . . . . . 3 aulas

Estática dos sólidos . . . . . 2 aulas

Dinâmica dos sólidos com um eixo fixo . . . . . 1 aula

Movimento e equilíbrio relativos . . . . . 2 aulas

Polígonos funiculares. Estática gráfica. Curvas funiculares. Catenária. Tensões e flechas em cabos aéreos . . . . . 3 aulas

Atrito . . . . . 2 aulas

Total . . . 40 aulas

b) *Física*

1.ª PARTE

Electrostática. Campo eléctrico . . . . . 1 aula

Lei de Coulomb . . . . . 1 aula

Repartição das cargas eléctricas. Comparação com a teoria dos potenciais estudada em Matemática. Distribuição contínua em volume	4 aulas
Distribuição contínua sobre superfícies	2 aulas
Distribuição de dupla camada	1 aula
Distribuição sobre condutores	2 aulas
Coeficientes de capacidade. Condensadores.	4 aulas
Dieléctricos	4 aulas
Energia do campo electrostático	2 aulas
Corrente eléctrica. Leis de Ohm e de Joule. Pilhas. Leis de Kirchoff. Distribuição permanente nas redes de condutores	7 aulas
Campo magnetostático	4 aulas
Campo electromagnético	5 aulas
Ionização dos gases rarefeitos. Aplicações	3 aulas
Total . . .	40 aulas

2.ª PARTE

Campo electromagnético variável. Ondas electromagnéticas. Sistemas de unidades	5 aulas
Indução electromagnética. Energia do campo electromagnético . . .	4 aulas
Corrente alterna. Harmónicas	3 aulas
Estudo de circuitos em corrente alterna	3 aulas
Teoria electromagnética da luz. Óptica geométrica	10 aulas
Acústica	5 aulas
Teoria de elasticidade. Ideias gerais sobre tensores	10 aulas
Total . . .	40 aulas

3.ª PARTE

Análise dimensional	2 aulas
Probabilidades. Variável casual. Valor médio. Média aritmética, geométrica e logarítmica. Desvio. Provas repetidas. Curva de probabilidade. Probabilidades contínuas	3 aulas
Teoria cinética dos gases. Lei da distribuição das velocidades de Maxwell. Conclusões	2 aulas
Gases perfeitos	2 aulas
Gases reais. Equação de Van der Walls. Estudo dos pontos críticos	5 aulas
Primeiro princípio da Termodinâmica	5 aulas
Gases	2 aulas
Segundo princípio da Termodinâmica. Escala das temperaturas absolutas	3 aulas
Teorema de Clausius. Entropia	3 aulas
Extensão do teorema de Clausius aos fenómenos irreversíveis. Potenciais termodinâmicos. Relação de Gibbs-Hellmoltz. Fórmulas de Clapeyron. Energia livre e energia ligada. Terceiro princípio da termodinâmica. Aplicação às reacções químicas	6 aulas
Aplicação das equações de Clapeyron ao estudo das mudanças de estado	2 aulas
Termodinâmica dos vapores. Transformações. Laminagem. Diagrama de Mollier	5 aulas
Total . . .	40 aulas

c) *Assuntos não incluídos em Matemática e Física*

Passando em revista os conhecimentos indispensáveis aos 4 assuntos básicos, verifica-se que ficam todos incluídos em Matemática e Física, com excepção do que se referem a fluidos, a transmissão de calor e a órgãos de máquinas. A integração destes conhecimentos dentro do curso depende das especialidades, e pode efectuar-se do seguinte modo:

1) *Fluidos*

I) Curso de Química: Em Física, 4.ª parte (ver artigo seguinte).
II) Restantes cursos: Em Hidráulica.

2) *Transmissão de calor*

I) Curso de Química: Em Física, 4.ª parte (ver artigo seguinte).
II) Restantes cursos: Nas cadeiras em que se estudar o isolamento térmico.

3) *Órgãos de máquinas*

I) Cursos Civil, Minas e Química: Em Máquinas Térmicas.
II) Cursos de Electricidade e Máquinas: Cadeira independente.

d) *Assuntos Básicos*

Os quatro assuntos básicos devem ser organizados, de maneiras diferentes conforme os cursos, excepto a 1.ª parte de Resistência de Materiais a que é possível dar uma forma comum.

1) *Resistência de Materiais*

1.ª PARTE

Classificação dos esforços. Tracção. Resiliência	5 aulas
Compressão. Fórmulas de Rankine, Euler e Vierendell	3 aulas
Corte. Esmagamento	3 aulas
Flexão	15 aulas
Torsão	1 aula
Peças de igual resistência	2 aulas
Esforços combinados	2 aulas
Cobrejuntas	2 aulas
Sistemas triangulados. Classificação. Revisão do método gráfico (Cremona) e do método analítico já conhecidos da prática de Mecânica Racional	4 aulas
Deformação dos sistemas triangulados	3 aulas
Total	40 aulas

2.ª PARTE

(excluindo o curso de Civil)

Trabalho molecular. Teorema de Castegliano. Teorema de Maxwell	3 aulas
Sistemas hiperstáticos. Aplicação da Teoria da elasticidade	4 aulas
Betão armado	9 aulas

Pormenores de construção. Coberturas. Superestruturas. Apoios isolados	5 aulas
Estruturas soldadas	4 aulas
Estruturas de madeira	1 aula
Alvenaria	4 aulas
Pavimentos. Escadas	1 aula
Fundações. Muros de suporte	6 aulas
Chaminés	3 aulas
Total	40 aulas

2) *Dinâmica dos Fluidos*

Para o curso de Química, ver Química Tecnológica, 1.ª parte (artigo seguinte); para os restantes cursos, existe a cadeira de Hidráulica.

3) *Teoria do Calor e das Máquinas Térmicas*

Para os cursos de Máquinas e de Electrotecnia tem de haver uma organização especial; para os restantes cursos, chega a cadeira de Máquinas Térmicas com a duração de um semestre, mas o curso de Química exige um semestre suplementar.

Máquinas Térmicas

1.ª PARTE

Aplicação da termodinâmica dos vapores, ao estudo dos ciclos usuais. Máquina a vapor	7 aulas
Caldeiras	8 aulas
Motores	10 aulas
Turbinas	7 aulas
Órgãos de máquinas	8 aulas
Total	40 aulas

4) *Teoria da Electricidade e das Máquinas Eléctricas*

O curso de Electricidade tem uma organização própria; os restantes cursos terão a cadeira de Máquinas Eléctricas, que não deverá durar mais de um semestre.

Máquinas Eléctricas

Instrumentos de medida	5 aulas
Geradores e motores de corrente contínua	8 aulas
Sistemas polifásicos. Campos girantes	4 aulas
Alternadores e motores de corrente alterna	8 aulas
Transformadores	4 aulas
Acumuladores. Comutatrizes. Rectificadores. Mutadores	3 aulas
Instalações eléctricas. Distribuição de energia	5 aulas
Aparelhos de comando e de segurança	1 aula
Iluminação	2 aulas
Total	40 aulas

e) *Outros assuntos de interesse geral*

Além dos assuntos básicos e dos fundamentos que os constituem, há outros assuntos de interesse geral, que há, também, necessidade de considerar. Esses assuntos são os seguintes:

Química Geral
Geometria Descritiva
Manipulações de Física
Desenho
Oficinas
Administração e Organização Industrial. Contabilidade
Economia Industrial

1) *Química Geral*

Os assuntos de Química que podem interessar a todos os cursos de Engenharia são a Purificação de Águas e algumas ideias gerais sobre a Análise de produtos utilizados em Engenharia. Para estudar estes assuntos, é suficiente um semestre; mas, como aos cursos de Química, Electrotecnia, Máquinas e Minas interessa, também, o estudo dos Combustíveis, este constituiria o segundo semestre, do qual se excluiria, portanto, o curso de Civil.

Química Geral

1.ª PARTE

Análise de produtos diversos:

Calcáreos, margas e argilas: Humidade, perda ao rubro, anidrido carbónico, sílica, ferro e alumina, cal e magnésio	2 aulas
Cal: Facilidade de conservação e de extinção e variação de volume devida à extinção	1 aula
Cal hidráulica e cimento: Perda ao rubro, sílica, ferro e alumina, cal e magnésio, cal livre. Densidade aparente, finura e tempo de presa.	3 aulas
Combustíveis sólidos: Humidade, cinzas, fusibilidade das cinzas, coque e matérias voláteis, poder calorífico	3 aulas
Petróleo de iluminação: Cor, peso específico, destilação fraccionada, temperatura de inflamação e de combustão, poder iluminante . .	2 aulas
Lubrificantes: Cor, peso específico, destilação, volatilidade, secatividade, temperaturas de inflamação e de combustão, viscosidade, comportamento a baixas temperaturas	2 aulas
Alcatrões: Humidade, peso específico, carbono livre, destilação fraccionada	1 aula
Asfalto: Peso específico, ponto de fusão, ensaios de penetração e de ductilidade.	2 aulas
Água: Propriedades físicas, reacção, substâncias em suspensão, resíduo fixo, dureza, alcalinidade, amoníaco, nitritos, nitratos, fosfatos, ácido sulfídrico, ferro e matéria orgânica	2 aulas

Purificação de águas

Águas destinadas à alimentação de caldeiras	15 aulas
Águas destinadas a usos urbanos	5 aulas
Águas para usos diversos	2 aulas
Total	40 aulas

2.ª PARTE

Generalidades sobre a combustão	4 aulas
Combustões completas e incompletas	2 aulas
Cálculo das quantidades de ar	1 aula
Cálculo dos produtos da combustão. Análise dos fumos	4 aulas
Cálculo das temperaturas de combustão	6 aulas
Cálculo das perdas de calor	4 aulas
Balanço térmico	1 aula
Gás de iluminação	4 aulas
Gás de gasogéneo	4 aulas
Combustíveis líquidos naturais e sintéticos	10 aulas
Total	40 aulas

2) *Geometria Descritiva*

Poderá ocupar um semestre com a distribuição indicada a seguir.

Geometria Descritiva

Ponto	1 aula
Recta	3 aulas
Plano	5 aulas
Problemas sobre ponto, recta e plano	1 aula
Rebatimentos	3 aulas
Mudanças de plano	1 aula
Rotações	2 aulas
Problemas métricos	3 aulas
Poliedros. Intersecção	4 aulas
Sombras	2 aulas
Projecções cotadas. Problemas métricos	3 aulas
Superfícies. Superfícies cónicas e cilíndricas. Envolventes. Sombras. Secções planas. Direcções assintóticas e assíntotas. Intersecção com uma recta	5 aulas
Planificação de superfícies cónicas e cilíndricas	2 aulas
Perspectiva	5 aulas
Total	40 aulas

3) *Manipulações de Física*

Deverá ocupar dois semestres, sendo parte das aulas dedicadas à preparação dos trabalhos e as restantes à execução. As primeiras aulas devem ser dedicadas ao estudo da Régua de Cálculo da Teoria dos Erros e do Traçado de Gráficos, em diferentes sistemas de coordenadas.

A escolha dos trabalhos não tem interesse para o problema em estudo.

4) *Desenho*

Deve ter como finalidade ensinar a interpretar desenhos e obrigar a adquirir treino em desenhos executados segundo as normas *standard*. A sua duração deverá ser de 3 semestres.

5) *Oficinas*

Deve ter como finalidade pôr os alunos em contacto com as ferramentas usuais e com máquinas-ferramentas, com execução de alguns trabalhos simples. Poderá ter a duração de 2 semestres.

6) *Administração e Organização Industrial. Contabilidade*

Deverá ter a duração de 1 semestre, com a distribuição indicada.

Administração e Organização Industrial. Contabilidade

Capital. Juro. Renda. Bancos. Operações financeiras	5 aulas
Aplicações de capital à Indústria. Amortização. Anuidades	6 aulas
Constituição de sociedades	3 aulas
Administração de empresas. Serviços industriais e comerciais . . .	4 aulas
Análise das despesas industriais. Mão de obra directa e matérias primas directas. Mão de obra indirecta, matérias primas indirectas, gastos de exploração, conservação, reparações gerais, armazenagem, despesas gerais. Determinação de cada uma destas despesas. Preço de custo dos produtos	8 aulas
Previsão de stocks de matérias primas e organização de armazéns	4 aulas
Organização. Fichas. Escrita. Contabilidade	10 aulas
Total . . .	40 aulas

7) *Economia Industrial*

Bens de consumo e bens de produção. Índices do nível de vida. Panorama mundial e nacional	4 aulas
Salários	3 aulas
Organização científica do trabalho	5 aulas
Doutrinas económicas	6 aulas
Legislação industrial	4 aulas
Condicionamento das indústrias. Panorama das indústrias nacionais. Seu valor económico, dentro do quadro geral de economia portuguesa. Perspectivas futuras	8 aulas
Organismos de coordenação	5 aulas
Legislação social. Estudo das condições de vida. Higiene industrial	5 aulas
Total . . .	40 aulas

CAPITULO II

ESTABELECIMENTO DOS HORÁRIOS

a) *Distribuição dos diferentes semestres*

Como se disse, no artigo sobre «A Orgânica das Aulas Práticas do Instituto Superior Técnico», é necessário «reduzir ao mínimo, em tempo, a parte preparatória»; por esta razão, a organização dos programas que se apresentou, foi feita de modo a ser possível completar a Matemática e a Física nos dois primeiros anos. Para isso, a distribuição dos semestres já estudados, pelos diferentes anos, terá de ser a que se indica a seguir.

1.º Ano

1.º semestre

Matemática, 1.ª parte
Geometria Descritiva
Química Geral, 1.ª parte
Desenho, 1.ª parte
Oficinas, 1.ª parte

2.º Semestre

Matemática, 2.ª parte
Matemática, 3.ª parte
Química Geral, 2.ª parte (excepto para Civil)
Desenho, 2.ª parte
Oficinas, 2.ª parte

2.º Ano

1.º Semestre

Matemática, 4.ª parte
Física, 1.ª parte
Administração e Organização Industrial. Contabilidade
Desenho, 3.ª parte

2.º Semestre

Matemática, 5.ª parte
Física, 2.ª parte
Física, 3.ª parte
Economia Industrial

3.º Ano

1.º Semestre

Física, 4.ª parte (exclusivamente para Química — ver artigo seguinte)
Resistência de Materiais, 1.ª parte
Electrotecnia (excepto para o curso de Electrotecnia)
Manipulações de Física, 1.ª parte

2.º *Semestre*

Resistência de Materiais, 2.ª parte
Máquinas, 1.ª parte (excepto para os cursos de Electrotecnia e Máquinas)
Manipulações de Física, 2.ª parte
Mecância Química, 1.ª parte (ver artigo seguinte)

b) *Tipos de aulas práticas*

I) *Cadeiras de cálculos*

As aulas práticas são de problemas, devem ter, como se viu [1], a duração de 2 horas e acompanhar rigorosamente a teoria. Terão de ser consideradas imperiosamente, como cadeiras de cálculos as seguintes:

Matemática, 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª e 5.ª partes
Física, 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes
Geometria Descritiva
Química Geral, 2.ª parte
Administração e Organização Industrial. Contabilidade
Resistência de Materiais, 1.ª e 2.ª partes
Mecânica Química

II) *Cadeiras descritivas*

As aulas práticas são laboratoriais e serão organizadas segundo as conveniências de horários. Serão consideradas como descritivas as cadeiras seguintes:

Química Geral, 1.ª parte
Electrotecnia Geral
Máquinas
Manipulações de Física

III) *Cadeiras sem prática*

Economia Industrial

IV) *Cadeiras especiais*

São o Desenho e as Oficinas. O Desenho deve ter, pelo menos, 6 horas semanais; quanto às Oficinas, não são necessárias mais de 4 horas por semana.

c) *Fixação dos horários dos três primeiros anos*

De acordo com os princípios desenvolvidos anteriormente [2], os horários dos três primeiros anos podem ser os que se indicam a seguir [3].

---

(1) *A Orgânica das Aulas Práticas do Instituto Superior Técnico.*
(2) *Idem.*
(3) A distribuição pode ser diferente.

1.º Ano

1.º Semestre

Dias / Horas	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Ginástica	Prática de Geom. Desc.	Ginástica	Prática de Geom. Desc.	Ginástica	Prática de Geom. Desc.
9-10	Geom. Desc.		Geom. Desc.		Geom. Desc.	
10-11	Matem. 1.ª	Prática de Matem. 1.ª	Matem. 1.ª	Prática de Matem. 1.ª	Matem. 1.ª	Prática de Matem. 1.ª
11-12	Química 1.ª		Química 1.ª		Química 1.ª	
14-15	Desenho 1.ª	Prática de Química 1.ª	Desenho 1.ª	Prática de Química 1.ª	Desenho 1.ª	
15-16						
16-17	Oficinas 1.ª		Oficinas 1.ª			
18-19						

Aulas teóricas	9 horas
Aulas práticas	16 horas
Desenho e Oficinas	10 horas
Total	35 horas

2.º Semestre

Dias / Horas	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Ginástica	Prática de Matem. 3.ª	Ginástica	Prática de Matem. 3.ª	Ginástica	Prática de Matem. 3.ª
9-10	Matem. 3.ª		Matem. 3.ª		Matem. 3.ª	
10-11	Matem. 2.ª	Prática de Matem. 2.ª	Matem. 2.ª	Prática de Matem. 2.ª	Matem. 2.ª	Prática de Matem. 2.ª
11-12	Química 2.ª		Química 2.ª		Química 2.ª	
14-15	Desenho 2.ª	Oficinas 2.ª	Desenho 2.ª	Oficinas 2.ª	Desenho 2.ª	
15-16						
16-17	Prática de Química 2.ª		Prática de Química 2.ª		Prática de Química 2.ª	
17-18						

Aulas teóricas	9 horas
Aulas práticas	18 horas
Desenho e Oficinas	10 horas
Total	37 horas

2.º Ano

1.º Semestre

Horas \ Dias	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Prática de Física 1.ª	Prática de Matem. 4.ª	Prática de Física 1.ª	Prática de Matem. 4.ª	Prática de Física 1.ª	Prática de Matem. 4.ª
9-10						
10-11	Administ.	Física 1.ª	Administ.	Física 1.ª	Administ.	Física 1.ª
11-12	Matem. 4.ª	Ginástica	Matem. 4.ª	Ginástica	Matem. 4.ª	Ginástica
14-15	Desenho 3.ª		Desenho 3.ª		Desenho 3.ª	
15-16						
16-17	Prática de Administ.		Prática de Administ.		Prática de Administ.	
17-18						

Aulas teóricas	9 horas
Aulas práticas	18 horas
Desenho	6 horas
Total	33 horas

2.º Semestre

Horas \ Dias	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Prática de Física 3.ª	Prática de Física 2.ª	Prática de Física 3.ª	Prática de Física 2.ª	Prática de Física 3.ª	Prática de Física 2.ª
9-10						
10-11	Física 2.ª	Física 3.ª	Física 2.ª	Física 3.ª	Física 2.ª	Física 3.ª
11-12	Matem. 5.ª	Economia	Matem. 5.ª	Economia	Matem. 5.ª	Economia
14-15	Prática de Matem. 5.ª		Prática de Matem. 5.ª		Prática de Matem. 5.ª	
15-16						
16-17	Ginástica		Ginástica		Ginástica	
17-18						

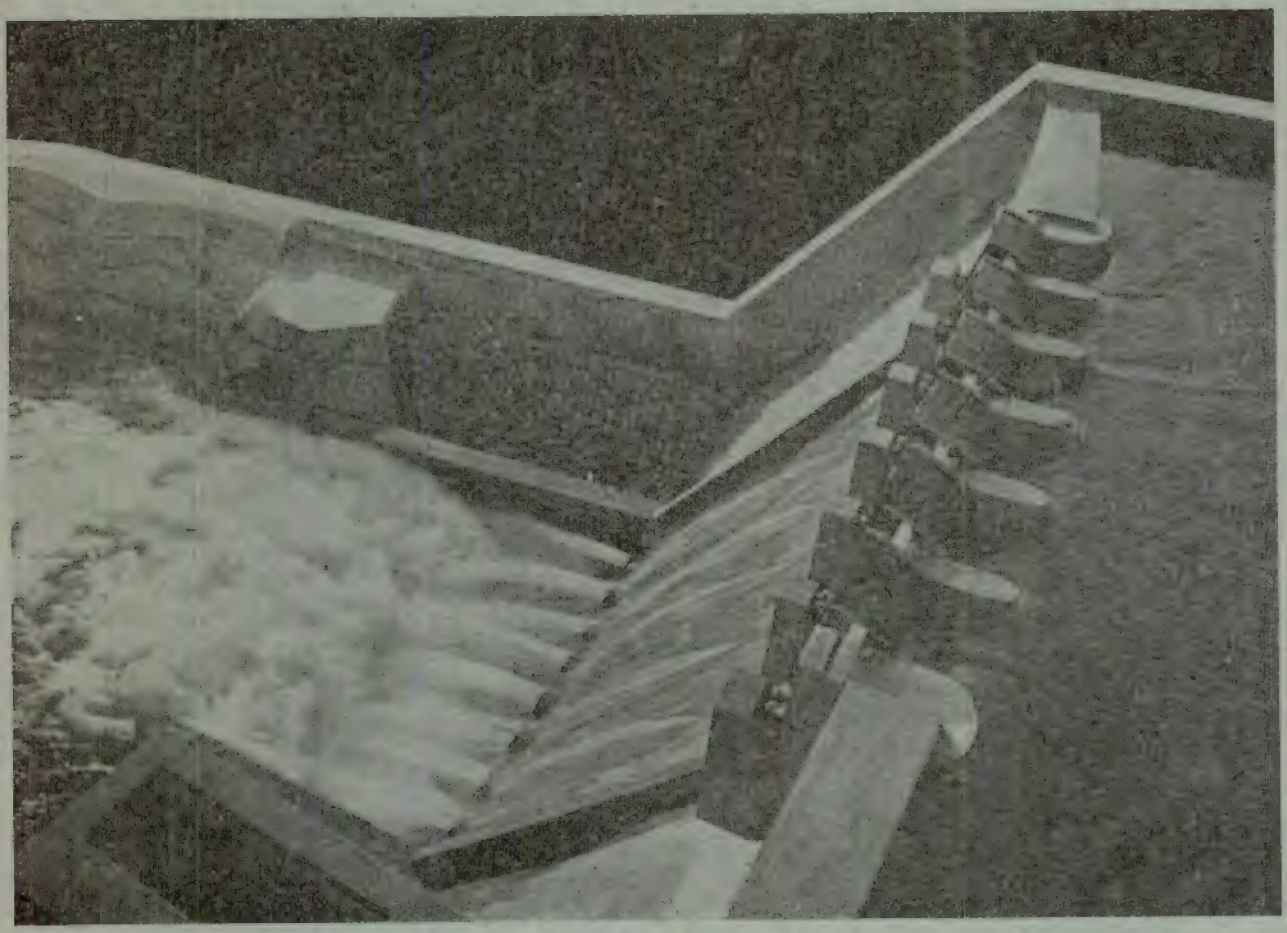
Aulas teóricas	12 horas
Aulas práticas	18 horas
Total	30 horas

LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

GRENOBLE

HIDRÁULICA FLUVIAL E MARÍTIMA — QUEDAS DE ÁGUA

Determinação económica das obras — Desassoreamentos
Aproveitamento dos rios — Eclusas
Utilização da energia das marés
Estudos de portos, de ancoradouros — Docas secas
Protecção do litoral — Estabilidade das praias.



BARRAGEM DE GRANDVAL

Estudo sobre modelo reduzido da dispersão da energia no pé da barragem.
Descarga de uma cheia de 1.900 m/3sec sobre a barragem.

EM PORTUGAL:

LABORATÓRIO DE HIDRÁULICA DA AMADORA

"NEYRPIC"

Avenida Duque de Loulé, 95, 4.º Esq. — LISBOA

Telef. 4 6889

ASFALTOS

PARA PAVIMENTOS

PARA A INDÚSTRIA

ENTREGA IMEDIATA

SHELL COMPANY OF PORTUGAL, LTD.

LISBOA — PORTO — COIMBRA — FARO

3.º Ano

1.º Semestre

Horas \ Dias	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Prática de Física 4.ª	Prática de Res. Mat. 1.ª	Prática de Física 4.ª	Prática de Res. Mat. 1.ª	Prática de Física 4.ª	Prática de Res. Mat. 1.ª
9-10						
10-11	Res. Mat. 1.ª	Ginástica	Res. Mat. 1.ª	Ginástica	Res. Mat. 1.ª	Ginástica
11-12	Electrot.	Física 4.ª	Electrot.	Física 4.ª	Electrot.	Física 4.ª
14-15	Manipul. de Física 1.ª	Prática de Electrot.	Manipul. de Física 1.ª	Prática de Electrot.	Manipul. de Física 1.ª	
15-16						
16-17						
17-18						

Aulas teóricas	9 horas
Aulas práticas	24 horas
Total	33 horas

2.º Semestre

Horas \ Dias	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
8-9	Prática de Mec. Quí. 1.ª	Prática de Res. Mat. 2.ª	Prática de Mec. Quí. 1.ª	Prática de Res. Mat. 2.ª	Prática de Mec. Quí. 1.ª	Prática de Res. Mat. 2.ª
9-10						
10-11	Res. Mat. 2.ª	Mec. Quí. 1.ª	Res. Mat. 2.ª	Mec. Quí. 1.ª	Res. Mat. 2.ª	Mec. Quí. 1.ª
11-12	Máquinas 1.ª	Ginástica	Máquinas 1.ª	Ginástica	Máquinas 1.ª	Ginástica
14-15	Manipul. de Física 2.ª	Prática de Máquinas 1.ª	Manipul. de Física 2.ª	Prática de Máquinas 1.ª	Manipul. de Física 2.ª	
15-16						
16-17						
17-18						

Aulas teóricas	9 horas
Aulas práticas	24 horas
Total	33 horas

d) *Síntese do estudo feito*

Dentro do espírito do que se disse na introdução, há toda a vantagem em fazer uma síntese do estudo feito, comparando ao mesmo tempo os resultados obtidos, com o actual curso geral do Instituto (incluindo no curso geral todas as cadeiras comuns). Essa síntese pode esquematizar-se nos seguintes pontos:

1) Os assuntos básicos são estudados no 3.º ano e, por isso, os seus preparatórios matemáticos e físicos tiveram de ser condensados nos dois primeiros anos.

2) A Física é estudada no 2.º ano (salvo a 4.ª parte destinada ao curso de Química), pelo que o programa de matemática do 1.º ano tem de ser escolhido, de modo a dar todos os elementos indispensáveis ao seu estudo.

3) Os programas que foram elaborados para Matemática e Física coincidem *quase integralmente* com os cursos actuais. As divergências verificadas encontram-se, pràticamente, só em alguns pontos que não são comuns e em pequenos pormenores de orientação (1).

As únicas diferenças sensíveis referem-se à supressão da Mecânica, do actual curso de Física e à transformação completa das aulas práticas de Física em aulas de problemas (2).

4) Suprime-se o estudo dos Combustíveis, do curso de Civil.

5) Reduz-se a Geometria Descritiva a um semestre.

6) Transporta-se para o 2.º ano o estudo das cadeiras Administração e Organização Industrial, Contabilidade e Economia Industrial, por razões a que se fará referência no artigo seguinte.

Quanto à orientação destas cadeiras, entendeu-se que a primeira tem como função principal a determinação dos preços de custo e a segunda o estudo das condições económicas da indústria portuguesa.

7) Reduz-se o Desenho a três semestres.

8) Amplia-se a Resistência de Materiais, englobando nela, parte do actual programa de Construções e Instalações Industriais.

9) Reduz-se a Electrotecnia a um semestre.

10) Reduz-se a parte Geral de Máquinas a um semestre, criando-se uma 2.ª parte para o curso de Química (ver artigo seguinte).

11) Cria-se a cadeira teórico-prática de Manipulações de Física.

12) Nos três primeiros anos não aparece nenhuma cadeira da especialidade, salvo no 3.º ano, um semestre de Mecânica Química para o curso de Química (ou de outras cadeiras para os restantes cursos).

13) Elaboraram-se os horários de modo tal que as aulas práticas de cálculos sejam, preferìvelmente, de manhã.

14) O número de horas de aulas semanais não é exagerado, e é reduzido ao mínimo no 2.º semestre do 2.º ano, atendendo à necessidade de estudar, com muito cuidado, as cadeiras que constituem o programa, dada a sua importância futura e a sua relativa complexidade.

15) Inclui-se a Ginástica em todos os horários.

---

(1) Não se indicam aqui essas divergências, visto que elas só interessam a quem estudar o assunto em pormenor.

(2) Aliás, estes problemas estão a ser gradualmente resolvidos.

e) *Conclusão*

A possibilidade de efectuar uma reforma nos moldes preconizados, tem de ser encarada sob dois aspectos: didático e de organização.

1) *Aspecto didático*

De tudo o que foi dito, se conclui que qualquer modificação que se pretenda fazer nos programas actuais, é extremamente simples, visto que, em linhas gerais, as alterações a fazer são relativamente pequenas.

2) *Aspecto de organização*

Sob este ponto de vista, as dificuldades são talvez maiores, porque qualquer alteração exige modificações profundas no sistema actual:

I — Dois semestres distintos em cada ano
II — Preparatórios nos dois primeiros anos
III — Assuntos básicos no terceiro ano
IV — Especialidade pràticamente só a partir do quarto ano
V — Aulas práticas com função de aulas de estudo
VI — Coordenação perfeita entre a teoria e a prática
VII — Aulas práticas de problemas dadas de manhã

Talvez fosse útil analisar até que ponto poderão ser removidas as dificuldades que vão aparecendo, mas, para isso, há vantagem em considerar o problema em toda a sua extensão, o que só é possível depois de estudada a organização das diferentes especialidades. Como é natural, limitar-me-ei a estudar a Organização do Curso de Química, mas as conclusões a que chegar são generalizáveis às outras especialidades, visto que a estrutura dos diferentes cursos de Engenharia obedece sensìvelmente às mesmas normas.

Para evitar descontinuidades, o artigo sobre «A Organização do Curso de Química do Instituto Superior Técnico» será publicado no próximo número da *Técnica*, a menos que apareça qualquer dificuldade inesperada.

ENGENHEIRO JOÃO LOPES RAIMUNDO

C. D. 92:62

Com a morte do Eng.º João Lopes Raimundo, ocorrida em 1 de Dezembro último, perdeu a indústria química portuguesa um técnico excepcionalmente apto, cuja

longa experiência, assinalada por realizações de vulto, era servida por inteligência lúcida, invulgar capacidade de trabalho e uma dedicação inteira ao progresso e aperfeiçoamento dessa indústria.

Também, com ele, desapareceu alguém cujas lições de química industrial se apoiavam na autoridade conferida por vida profissional notável e que dava aos seus discípulos o exemplo vivo dum senso técnico apuradíssimo.

Este «sexto sentido», que a cada passo se evidenciava, e a posse dum raciocínio claro e rápido davam à figura de Lopes Raimundo o maior relevo; ele foi, acima de tudo, um grande engenheiro e como tal considerado não só entre nós mas ainda nos meios técnicos do estrangeiro com os quais teve contacto.

Nascido em Abrantes, a 23 de Fevereiro de 1900, concluíu o curso de engenheiro químico-industrial do Instituto Superior Técnico em 1923.

Iniciando a vida profissional nas minas do Pejão, entrava pouco depois para a Companhia Industrial Portuguesa, cuja direcção técnica ocupou desde 1925 até à data do seu falecimento.

A sua primeira realização, em 1927, foi a fábrica de ácido sulfúrico na Póvoa de Santa Iria, ainda hoje em funcionamento. Também na Companhia Industrial Portuguesa se ocupou durante muito tempo da indústria do vidro, introduzindo certos processos novos na fábrica dessa Empresa, na Marinha Grande.

Fica-lhe devendo a indústria nacional dois importantes empreendimentos: a fábrica de vidros planos, «Covina», que projectou, construíu e pôs a funcionar e a instalação da fábrica de carbonato de sódio da actual «Soda Póvoa», que, sob o seu impulso e orientação, a Companhia Industrial Portuguesa fundou e pôs em laboração.

Mais recentemente, em 1940, fez o projecto e a instalação duma fábrica moderna de superfosfato, também na Póvoa.

A sua acção como técnico empreendedor fez sentir-se no Brasil, onde o projecto que

elaborou a pedido do Governo brasileiro serve hoje de base à instalação da indústria dos álcalis naquele país. Importante ainda foi a sua intervenção na instalação das duas fábricas brasileiras de vidro plano.

Não lhe permitiu a morte que realizasse um projecto em que meditava há muito e que ele considerava como o coroamento da sua obra de engenheiro: a instalação em Portugal duma grande fábrica de adubos azotados sintéticos. A oportunidade de se ocupar dum tal empreendimento surgira-lhe há pouco, quando a Sociedade Portuguesa dos Sais de Potássio o escolheu para seu consultor. Quando depois se constituiu, expressamente para aquele fim, a Sociedade dos Adubos de Portugal, foi Lopes Raimundo convidado para chefiar o respectivo Serviço de Estudos e nesse posto se conservou até à sua morte.

Minado já pela implacável doença que o vitimou, conseguiu ainda marcar directrizes seguras, elaborando estudos e relatórios onde as suas invulgares qualidades de técnico esclarecido ficaram vincadas.

Entrara no ensino em 1931, como assistente do que fora seu Mestre, o Prof. Charles Lepierre, passando a assistente encarregado de regência da cadeira de Química Tecnológica do I. S. T. em 1936 e mais tarde, em 1941, a professor interino, cargo que desempenhou até ao fim do ano lectivo de 1946-47.

As qualidades que foram apontadas como salientes em Lopes Raimundo não seriam suficientes para a obra construtiva que efectivamente realizou. Não lhe bastaria ser inteligente e possuir o amor e o sentido do seu ofício. Era preciso ter, como tinha, a vontade e a capacidade de estudar a fundo os problemas sob os aspectos técnico e económico, documentando-se pela leitura de excelente bibliografia (o Engenheiro Lopes Raimundo possuía uma grande e boa biblioteca da sua especialidade), fazendo frequentes viagens lá fora, meditando e discutindo os pormenores desses problemas e cuidadosamente arquivando e classificando todos os elemento úteis que podia colher.

Esta meticulosa preparação transparecia nos projectos e relatórios que saíam das suas mãos. Ora um tal estudo em profundidade e de pormenor é sempre condição necessária para bem executar.

Em Portugal, a despeito do muito que temos progredido nos últimos anos no sentido das realizações técnicas, está ainda por fazer a reabilitação da verdadeira competência, que não é o «cria fama e deita-te a dormir», mas sim a existência dum cabedal de conhecimentos lentamente acumulados que contìnuamente se aperfeiçoam e ampliam, pelo estudo regular, pela meditação e pela experiência. Por isso a escola que habilita para uma profissão intelectual cumprirá a sua mais alta missão se os diplomados dela saírem sabendo perfeitamente como e onde se podem estudar os respectivos problemas. E o maior dom do professor será o de saber despertar nos alunos o amor por esse estudo, o qual, pela vida fora, lhes aparecerá como alimento imprescindível.

Desconfiemos sempre das soluções fáceis, ideias surgidas no decorrer duma conversa ou meditação superficial, que nos trazem a ilusão perigosa de que estamos senhor dos assuntos. E nesse pleito, tantas vezes renovado, entre o valor da ciência e o da experiência na nossa profissão, tomemos o partido mais sensato e consideremos como padrão do engenheiro aquele que alia a uma larga e frutuosa experiência a capacidade e a vontade de estudar — dando a este verbo o seu mais amplo sentido.

Uma outra qualidade informou ainda a acção de Lopes Raimundo como técnico: o espírito de iniciativa, que não desanimava perante as dificuldades. De muitas das suas realizações lhe couberam não só o projecto e a execução mas ainda a ideia inicial e muitas das diligências para as tornar possíveis.

Olhando agora os frutos da sua competência e do seu esforço, muito haveria a meditar sobre o «valor económico» do engenheiro.

Além das funções docentes, o Eng.º Lopes Raimundo fez oficialmente parte dalguns organismos, como a Junta Consultiva do Instituto Português de Combustíveis e a Comissão de Explosivos. Em vários ensejos forneceu às entidades oficiais valiosos elementos sobre questões de indústria.

Realizou missões de estudo, em especial uma à Alemanha, em 1939, e outra à Roménia, em 1941.

Das suas qualidades como homem, destacarei uma que me parece dominante. Pela vida fora, Lopes Raimundo conservou um fervoroso culto pela amizade. Pode dizer-se que vivia para a família e para os seus amigos. E nem o seu feitio, por vezes um pouco difícil, conseguia ofuscar esse predicado. Se alguma vez esse feitio o indispôs com alguém, todo o seu ressentimento abatia ao mais leve apelo à sua afectividade.

Da mesma essência era o seu sentimento de solidariedade humana.

Não será vulgar encontrar-se alguém tão sensível como ele à genuína caridade, não simples sentimento «de superfície» e estático, mas antes, como o quer o cristianismo, um movimento profundo, que ele cumpria com inquietação e alvoroço.

Ouvi-lhe dizer várias vezes que nada o impressionava tanto como um raciocínio rico de pura lógica, claramente enunciado. Mas era igualmente certo que o dominava inteiramente uma funda e activa comoção perante as manifestações do sofrimento alheio.

O seu próprio quinhão de dor, durante a fase aguda da doença, foi grande e angustiante. Não poderão esquecê-lo aqueles que o acompanharam nesses meses, mais dolorosos ainda para o seu espírito que para o seu corpo.

O espectáculo dum homem que ia desaparecer numa altura da vida em que as suas faculdades atingiam a plena força, quando tudo parecia conjugar-se para transformar o seu maior desejo numa realidade, não se apagará tão cedo da lembrança dos seus amigos.

Que ao menos nos possa servir de consolação o exemplo da obra que o Eng.º Lopes Raimundo pôde levar a cabo e que fica apresentando um notável saldo positivo a bem da indústria e da técnica em Portugal.

A. Herculano de Carvalho

LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉCTRICA EM CORRENTE ALTERNADA. REGIME FORÇADO.

PELO ENG.º DIPL.º (I. S. T.) ANTÓNIO A. DE CARVALHO FERNANDES, M. I. R. E.

Assistente do I. S. T.

C. D. 621.315:621.3.025

INTRODUÇÃO

O problema da transmissão de energia eléctrica por linhas interessa, de modo geral, a todos os ramos fundamentais da Electrotecnia. Reveste-se contudo de aspectos diferentes em cada uma das especialidades interessadas e é por isso frequentemente estudado apenas dentro dos ângulos restritos dessas especialidades. A maioria dos autores estuda também o problema das linhas de transmissão a partir das leis da teoria dos circuitos, na sua forma prática, sem qualquer referência às equações de Maxwell.

No estudo que agora se publica, procurámos tratar o problema com generalidade estabelecendo, a partir das Leis Fundamentais do Electromagnetismo, a teoria das linhas de transmissão de parâmetros uniformemente distribuídos. Mostramos a seguir a aplicação das conclusões fundamentais obtidas a três casos típicos: — linhas para transporte de grandes quantidades de energia a grandes distâncias, linhas para circuitos telefónicos e linhas para rádio-frequência. Apresentamos ainda o estudo feito sobre malhas equivalentes a linhas com parâmetros uniformemente distribuídos. Finalmente, o nosso estudo teórico refere-se à analogia de uma estrutura periódica de malhas «T» ou de malhas «π» iguais, com uma linha com parâmetros uniformemente distribuídos. Na 2.ª Parte deste Estudo relatamos os resultados obtidos no trabalho experimental do ensaio de uma linha de transmissão artificial.

Como se indica no título do trabalho, limitámos o nosso estudo ao caso do regime forçado da transmissão de energia eléctrica em corrente alternada. Desejamos ainda referir que o Sistema de Unidades utilizado é, salvo indicação em contrário, o Sistema Electromagnético de Maxwell; os cálculos práticos realizados foram, em geral, feitos usando o Sistema Prático Electromagnético.

O estudo que agora se publica é baseado no trabalho que apresentámos, para a obtenção do Diploma a que se refere o artigo 44.º do Regulamento do Instituto Superior Técnico. Foram tidas em consideração as observações, de carácter objectivo, que nos foram feitas pelo Ex.mo Professor Doutor-Engenheiro Carlos Ferrer Moncada, durante a apreciação do trabalho apresentado.

1.ª PARTE — ESTUDO TEÓRICO

1.0 Estudo da variação da tensão e da corrente ao longo da linha e em relação ao tempo. Caso geral. Regime forçado no circuito

1.1 *Equações gerais*

Consideremos uma linha com os seguintes valores dos parâmetros por unidade de comprimento de linha:

R resistência óhmica
L coeficiente de auto-indução
C capacidade
G condutância de isolamento (inverso da resistência de isolamento entre os condutores da linha).

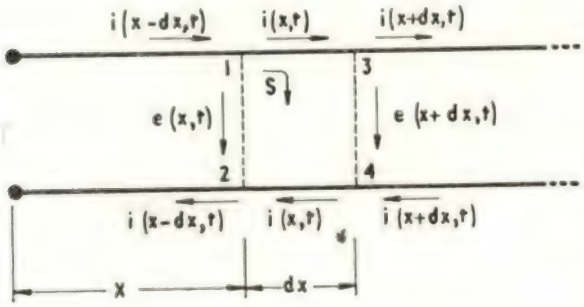


Fig. 1

Designemos por x a distância de um ponto à extremidade da linha tomada como origem, sob o ponto de vista de fornecimento de energia. Consideremos, como se representa na figura, um troço de linha de comprimento dx.

Designemos por e (x, t) o valor instantâneo da tensão entre os pontos 1 e 2 de abcissa x. Designemos por e (x + dx, t) o valor instantâneo da tensão entre os pontos 3 e 4 de abcissa x + dx.

Consideremos que, no troço dx já referido, a corrente tem o valor instantâneo i (x, t) e que, no troço seguinte e no troço antecedente tem, respectivamente, os valores instantâneos i (x + dx, t) e i (x — dx, t).

Consideremos que as funções e (x, t) e i (x, t) satisfazem, relativamente à sua variação com x, às condições exigidas para a aplicação da fórmula de Taylor; isto significa que admitimos que as funções e (x, t) e i (x, t) são contínuas e deriváveis ao longo de toda a linha.

Teremos então

$$e(x+dx,t) = e(x,t) + \frac{\partial e(x,t)}{\partial x}\,dx \qquad (1.1)$$

$$i(x+dx,t) = i(x,t) + \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\,dx \qquad (1.2)$$

$$i(x-dx,t) = i(x,t) - \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\,dx\,, \qquad (1.3)$$

expressões verdadeiras a menos de infinitésimos de ordem superior à primeira.

Apliquemos a Lei de Indução ao contorno fechado $\widehat{s}\downarrow$ [1342] relativo ao troço de linha considerado.

$$\left(\int_{\widehat{s}\downarrow}\right)(\vec{E}\,\vec{ds})_t = -\frac{d}{dt}\iint_{F\widehat{s}\downarrow}(B_n\,df)_t \qquad (I)$$

O primeiro termo desta expressão representa, como sabemos, o valor instantâneo da circulação do vector campo eléctrico $\vec{E}$ ao longo desse contorno fechado; o segundo termo refere-se à variação em relação ao tempo do fluxo do vector indução magnética $\vec{B}$ através de uma superfície F que se apoia sobre o contorno $\widehat{s}\downarrow$ considerado.

Calculando a circulação do vector campo eléctrico $\vec{E}$ ao longo de $\widehat{s}\downarrow$ concluiremos imediatamente

$$\left(\int_{\widehat{s}\downarrow}\right)(\vec{E}\,\vec{ds})_t = R\,dx\,i(x,t) + e(x+dx,t) - e(x,t).$$

O cálculo do segundo termo da equação será, observando que se trata de corpos em repouso,

$$-\frac{d}{dt}\iint_{F\widehat{s}\downarrow}(B_n\,df)_t = -\iint_{F\widehat{s}\downarrow}\left[\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)_n df\right]_t =$$

$$= -L\,dx\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\,,$$

FREDERICK PARKER, LTD.

LEICESTER GRÃ-BRETANHA

Fornecedores das instalações de lavagem e seleccionamento de cascalho para as obras da Barragem do Castelo do Bode (Hidro Eléctrica do Zêzere), instalações de britagem, seleccionamento, ensilagem e betonagem para a Barragem Covão do Meio (Hidro Eléctrica da Serra da Estrela), instalações de britagem e seleccionamento da Barragem das Mabubas, em Angola, e de diversas máquinas à Junta Autónoma das Estradas, Direcção Geral da Aeronáutica Civil, Câmaras Municipais de Lisboa e Beja, Direcção Hidráulica do Mondego, e a numerosos construtores civis e empreiteiros de Obras Públicas

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

F. NÓBREGA DE LIMA, L.DA

LISBOA
Avenida 24 de Julho, 1, 2.º D.
Tel. 22192-3

STAND DE EXPOSIÇÕES
LARGO DE SANTOS, 5

PORTO
Rua Sá da Bandeira, 562, 3.º
Tel. 2 2553

OILITE

CHUMACEIRAS DE BRONZE DE

AUTO LUBRIFICAÇÃO

Contêm lubrificante sufuciente para as tornar eficientes em largas variações de velocidade e carga em prolongados períodos de serviço aturado. A precisão das dimensões de acabamento podem ser mantidas dentro de tolerancias minimas do que as possíveis com as chumaceiras vulgares.

AGENTES EM PORTUGAL:
AHLERS, LINDLEY, LDA.
TELEFONES: 21321 2,3/4
R. FERREGIAL DE BAIXO, 33-2.º

THE MANGANESE BRONZE & BRASS CO. LTD
HANDFORD WORKS, IPSWICH TELEPHONE IPSWICH 2127 TELEGRAMS "BRONZE IPSWICH"

em que L será neste caso o coeficiente de auto-indução relativo ao contorno fechado considerado; considerámos também a não existência de materiais ferromagnéticos, isto é, L independente de i.

Será portanto

$$R\,dx\,i\,(x, t) + e\,(x + dx, t) - e\,(x, t) =$$

$$= - L\,dx\,\frac{\partial i\,(x, t)}{\partial t}\,. \qquad (1.4)$$

A aplicação da Lei Geral de Indução, tal como foi feita, reveste-se de maior simplicidade por termos considerado como lineares os condutores da linha. O problema é, contudo, muito mais complexo se tivermos em consideração a forma física dos condutores.

Na figura 1 representam-se os condutores de forma cilíndrica e indica-se «um» caminho que pode ser tomado para a circulação.

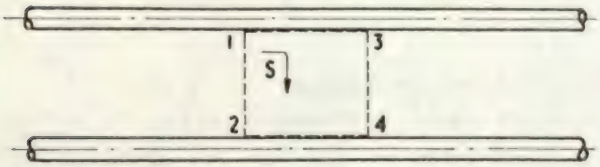


Fig. 1-a

Uma análise rigorosa do problema exigiria uma definição concreta do caminho de circulação. Ter-se-ia de tomar em consideração a distribuição dos campos eléctrico e magnético dentro e fora dos condutores e os factores que influem nessa distribuição. E o problema é tão complicado que alguns autores consideram que não pode ser obtida uma solução geral rigorosa. O problema pode contudo ser analisado com suficiente aproximação para os casos de importância prática. Nesses casos considera-se, em geral, que a componente transversal do campo eléctrico no meio que envolve os condutores é muito grande em relação à respectiva componente tangencial e à componente transversal do campo eléctrico nos condutores. A análise do problema está contudo fora do âmbito do estudo que agora publicamos.

De (1.1) e (1.4) resultará

$$-\frac{\partial e\,(x, t)}{\partial x} = R\,i\,(x, t) + L\,\frac{\partial i\,(x, t)}{\partial t}\,. \qquad (1.5)$$

Apliquemos agora a Lei div $\vec{j} = 0$ ao nó do ponto 1:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}\left(\vec{i} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (II)$$

em que, como sabemos, as letras usadas tem os seguintes significados:

$\vec{i}$ — vector densidade de corrente de condução

$\vec{D}$ — vector deslocamento eléctrico

$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — vector densidade de corrente de deslocamento.

Consideremos que entre os pontos 1 e 2 fluem as correntes correspondentes à resistência de isolamento e à capacidade da linha relativas ao troço dx.

No aspecto integral da equação

$$\operatorname{div}\left(\vec{i} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

o termo correspondente à corrente deslocamento será i_1 (x, t) dado pela seguinte equação:

$$e\,(x, t) = \frac{\int i_1\,(x, t)\,dt}{C\,dx}$$

ou, derivando em ordem à variável t,

$$i_1\,(x, t) = C\,dx\,\frac{\partial e\,(x, t)}{\partial t}\,.$$

O termo correspondente à corrente de condução, em derivação, relativa à resistência de isolamento, será i_2 (x, t) dado pela seguinte relação:

$$e\,(x, t) = i_2\,(x, t)\,\frac{1}{G\,dx}$$

donde

$$i_2(x, t) = G\, dx\, e(x, t). \qquad (1.7)$$

Atendendo aos significados apresentados para $i(x - dx, t)$ e $i(x, t)$ resultará portanto pela aplicação de (II) no seu aspecto integral:

$$i_1(x, t) + i_2(x, t) = i(x - dx, t) - i(x, t). \qquad (1.8)$$

Atendendo agora às equações (1.6), (1.7) e (1.3) resultará

$$G\, e(x, t) + C \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x}. \qquad (1.9)$$

Escrevamos agora em conjunto as equações (1.5) e (1.9)

$$-\frac{\partial e(x, t)}{\partial x} = R\, i(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G\, e(x, t) + C \frac{\partial e(x, t)}{\partial t}.$$

É este sistema de equações às derivadas parciais que determina a variação, ao longo da linha e em relação ao tempo, da tensão entre condutores e da corrente nos condutores.

Limitemos a nossa atenção ao estudo do regime forçado no circuito. Utilizemos a representação simbólica das correntes alternadas; os vectores $\dot{E}$ e $\dot{I}$ representarão as amplitudes complexas, respectivamente, da tensão e da corrente.

Seja ω a frequência da tensão aplicada; representemos por ε a base dos logaritmos naturais e por j a unidade imaginária. Poderemos portanto escrever:

$$e(x, t) = \dot{E}(x)\, \varepsilon^{j\omega t} \qquad (1.10)$$

$$i(x, t) = \dot{I}(x)\, \varepsilon^{j\omega t}. \qquad (1.11)$$

Calculemos as derivadas

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial t} = j\omega\, \dot{E}(x)\, \varepsilon^{j\omega t} \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial e(x, t)}{\partial x} = \varepsilon^{j\omega t} \frac{d\dot{E}(x)}{dx} \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = j\omega\, \dot{I}(x)\, e^{j\omega t} \qquad (1.14)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = \varepsilon^{j\omega t} \frac{d\dot{I}(x)}{dx}. \qquad (1.15)$$

Das equações (1.5), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) resultará

$$-\varepsilon^{j\omega t} \frac{d\dot{E}(x)}{dx} = R\, \dot{I}(x)\, \varepsilon^{j\omega t} + L\, \dot{I}(x)\, j\omega\, \varepsilon^{j\omega t} \qquad (1.16)$$

$$-\varepsilon^{j\omega t} \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = G\, \dot{E}(x)\, \varepsilon^{j\omega t} + C\, \dot{E}(x)\, j\omega\, \varepsilon^{j\omega t}. \qquad (1.17)$$

Considerando o instante $t = o$

$$-\frac{d\dot{E}(x)}{dx} = (R + j\omega L)\, \dot{I}(x) \qquad (1.18)$$

$$-\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = (G + j\omega C)\, \dot{E}(x). \qquad (1.19)$$

Procuremos integrar este sistema.

Derivando a equação (1.18) em ordem a x teremos

$$-\frac{d^2\dot{E}(x)}{dx^2} = \frac{d\dot{I}(x)}{dx}(R + j\omega L). \qquad (1.20)$$

Derivando a equação (1.19)

$$-\frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = \frac{d\dot{E}(x)}{dx}(G + j\omega C). \qquad (1.21)$$

Das equações (1.18 e (1.21) resulta portanto

$$\frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = (G + j\omega C)(R + j\omega L)\, \dot{I}(x). \qquad (1.22)$$

Das equações (1.19) e (1.20) resultará:

$$\frac{d^2\dot{E}(x)}{dx^2} = (G + j\omega C)(R + j\omega L)\, \dot{E}(x). \qquad (1.23)$$

Chamando μ ao complexo

$$\mu = (G + j\omega C)(R + j\omega L) \qquad (1.24)$$

teremos

$$\frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} = \mu \dot{I}(x) \qquad (1.25)$$

$$\frac{d^2 \dot{E}(x)}{dx^2} = \mu \dot{E}(x). \qquad (1.26)$$

Designando por

$$\gamma = +\sqrt{\mu} \qquad (1.27)$$

e integrando as equações (1.25) e (1.26) obteremos

$$\dot{I}(x) = k_1 \varepsilon^{\gamma x} + k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \qquad (1.28)$$

$$\dot{E}(x) = k_3 \varepsilon^{\gamma x} + k_4 \varepsilon^{-\gamma x}, \qquad (1.29)$$

sendo k_1, k_2, k_3, k_4 constantes complexas que é necessário determinar, mas que não são todas independentes. Procuremos então determinar as expressões que as relacionam. Derivando em ordem a x a equação (1.29) e introduzindo esta expressão na equação (1.18), teremos

$$\gamma (k_4 \varepsilon^{-\gamma x} - k_3 \varepsilon^{\gamma x}) = (R + j\omega L)\, \dot{I}(x).$$

Atendendo às equações (1.24) e (1.27) e à equação anterior poderemos obter

$$\dot{I}(x) = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}}\, (k_4 \varepsilon^{-\gamma x} - k_3 \varepsilon^{\gamma x}). \qquad (1.30)$$

Comparando as equações (1.28) e (1.30) poderão ser concluídas as seguintes relações que procurávamos obter

$$k_3 = -k_1 \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \qquad (1.31)$$

$$k_4 = +k_2 \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \qquad (1.32)$$

Podemos ainda verificar que a expressão $\sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$ tem as dimensões de uma impedância. Designemos este factor por $\dot{Z}_0$; veremos adiante qual é o seu significado físico.

As expressões (1.31) e (1.32) tomam assim o seguinte aspecto

$$k_3 = -k_1 \dot{Z}_0$$

$$k_4 = +k_2 \dot{Z}_0 .$$

Das 4 constantes de integração referidas nas equações (1.28) e (1.29) só duas são independentes e essas poderão ser determinadas a partir das condições iniciais e terminais na linha considerada.

Dediquemos agora a nossa atenção ao valor de γ para que as equações a obter, da variação da tensão e da corrente ao longo da linha e em relação ao tempo, sejam mais significativas.

Seja

$$\gamma = \alpha + j\beta . \qquad (1.33)$$

Determinemos α e β em função dos parâmetros do circuito. Em virtude das equações (1.24) e (1.27) será

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(GR - \omega^2 LC) + j(\omega CR + \omega GL)}.$$

Elevando ao quadrado, teremos

$$\alpha^2 - \beta^2 + j\,2\alpha\beta = (GR - \omega^2 LC) + j(\omega CR + \omega GL).$$

Concluímos portanto

$$\alpha^2 - \beta^2 = GR - \omega^2 LC$$

$$2\alpha\beta = \omega(CR + GL).$$

Elevando ao quadrado e somando as duas equações resultará

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2).$$

Teremos portanto

$$\alpha^2 - \beta^2 = GR - \omega^2 LC$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)},$$

donde se conclui

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{GR - \omega^2 LC + \sqrt{(G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}} \qquad (1.34)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 LC - GR + \sqrt{(G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}}. \tag{1.35}$$

Depois das considerações feitas sobre as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 e sobre a constante γ será agora oportuno concluir, com toda a generalidade, a partir das equações (1.10), (1.11), (1.28) e (1.29)

$$i(x, t) = k_1 \varepsilon^{\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} + k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} \tag{1.36}$$

$$e(x, t) = k_3 \varepsilon^{\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} + k_4 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t}. \tag{1.37}$$

Considerando ainda a expressão de γ, dada pela equação (1.27) teremos

$$i(x, t) = k_1 \varepsilon^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)} + k_2 \varepsilon^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)} \tag{1.38}$$

$$e(x, t) = k_3 \varepsilon^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)} + k_4 \varepsilon^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)}. \tag{1.39}$$

Tal como já tinha sido indicado anteriormente e utilizando a representação simbólica em correntes alternadas, os valores das amplitudes complexas da corrente e da tensão serão, respectivamente, dados pelas expressões

$$\dot{I}(x) = k_1 \varepsilon^{\gamma x} + k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \tag{1.40}$$

$$\dot{E}(x) = k_3 \varepsilon^{\gamma x} + k_4 \varepsilon^{-\gamma x}. \tag{1.41}$$

Analisando estas expressões poderemos concluir que a variação da corrente ao longo da linha e em relação ao tempo se poderá considerar como o resultado da sobreposição de duas ondas que se propagam em sentidos contrários. A segunda parcela da expressão de i (x, t)

$$k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} = k_2 \varepsilon^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)},$$

significa uma onda incidente (que se propaga no sentido dos x x crescentes). É evidente que, para esta onda, a mesma condição de fase se verifica em pontos tais que

$$x = \frac{\omega}{\beta} t + C.^{te}$$

A *velocidade de propagação* da onda será, portanto

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \tag{1.42}$$

Vemos ainda que esta onda sofre uma atenuação na sua progressão no sentido dos xx crescentes, em virtude do factor $\varepsilon^{-\alpha x}$.

A primeira parcela da expressão de i (x, t)

$$k_1 \varepsilon^{\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} = k_1 \varepsilon^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)},$$

refere-se a uma onda que se propaga no sentido dos x x decrescentes, também com uma velocidade $v = \frac{\omega}{\beta}$ e sofrendo, nesse sentido, uma atenuação caracterizada pelo factor $\varepsilon^{\alpha x}$. A esta onda é costume dar a designação de onda reflectida, visto que resulta, como adiante veremos, de uma reflexão dependente das condições de terminação da linha.

Vemos ainda que a expressão e (x, t) resulta também da sobreposição de duas ondas propagando-se em sentidos contrários:

a onda incidente

$$k_4 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} = k_4 \varepsilon^{-\alpha x + j(\omega t - \beta x)},$$

a onda reflectida

$$k_3 \varepsilon^{\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} = k_3 \varepsilon^{\alpha x + j(\omega t + \beta x)}.$$

Têm estas ondas a mesma velocidade de propagação $v = \frac{\omega}{\beta}$ e o mesmo efeito de atenuação traduzido pelo factor $\varepsilon^{\alpha x}$.

As amplitudes complexas das ondas incidente e reflectida da corrente serão respectivamente, dados pelas expressões

$$k_2 \varepsilon^{-\gamma x}$$

e

$$k_1 \varepsilon^{\gamma x},$$

como se conclui das equações (1.40).

As amplitudes complexas das ondas inci-

dente e reflectida da tensão serão respectivamente, dadas pelas expressões

$$k_1 \varepsilon^{-\gamma x}$$

$$k_3 \varepsilon^{\gamma x} ,$$

como se conclui da expressão (1.41).

1.2 *Constante de propagação da linha*

Analisemos as condições de propagação das ondas acima referidas; consideremos, por exemplo, o caso da onda incidente da expressão de i (x, t)

$$k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t} .$$

Se calcularmos a relação dos valores desta expressão, respectivamente em dois pontos de abcissas x e (x + 1) teremos

$$\frac{k_2 \varepsilon^{-\gamma x} \varepsilon^{j\omega t}}{k_2 \varepsilon^{-\gamma (x+1)} \varepsilon^{j\omega t}} = \varepsilon^{\gamma} . \qquad (1.43)$$

Vemos assim que a constante γ, que depende apenas das constantes da linha e da frequência da tensão aplicada, condiciona portanto as condições de propagação da onda ao longo da linha. Por isso é costume designar esta constante por *Constante de Propagação*. É ainda o valor de γ que condiciona a propagação da onda reflectida da corrente e das ondas de tensão.

Vimos já que, no caso geral, γ será um número complexo, dado pela expressão

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(GR - \omega^2 LC) + j(\omega CR + \omega GL)} .$$

1.3 *Constante de enfraquecimento e constante de comprimento de onda da linha*

Vejamos qual é o significado físico dos factores α e β, respectivamente parte real e coeficiente da parte imaginária do complexo γ.

Vimos já que quer a onda incidente, quer a reflectida, das expressões de variação da tensão e da corrente ao longo da linha e em relação ao tempo, se propagam com uma velocidade

$$v = \frac{\omega}{\beta} .$$

Atendendo à definição de comprimento de onda $\lambda = vT = \frac{v}{f}$ e por ser $\omega = 2\pi f$ concluímos então

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} . \qquad (1.44)$$

Por o valor de β condicionar a velocidade de propagação e, portanto, o comprimento de onda, é designado por *Constante de Comprimento de Onda*. Por este valor condicionar a variação de fase da onda ao longo da linha, é também frequentemente designado por *Constante de Fase da Linha*.

Vimos já que o factor α condiciona o enfraquecimento sofrido pelas ondas no seu sentido de propagação. Por isso a α se dá o nome de *Constante de Enfraquecimento ou de Atenuação*.

Os valores de α e β são, no caso geral, dados pelas expressões (1.34) e (1.35) que a seguir repetimos

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{GR - \omega^2 LC + \sqrt{(G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega^2 LC - GR + \sqrt{(G^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}}$$

Por definição, os valores de α e β são reais; vemos ainda que os seus valores dependem dos parâmetros da linha e da frequência da tensão aplicada na origem da linha.

1.4 *Impedância característica da linha*

Consideremos novamente as expressões da variação ao longo da linha das ondas incidentes da tensão e da corrente e calculemos, para um dado instante, o cociente das amplitudes complexas dessas duas ondas.

Teremos assim

$$\frac{k_1 \varepsilon^{-\gamma x}}{k_2 \varepsilon^{-\gamma x}} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \dot{Z}_0 \qquad (1.45)$$

A este cociente $\dot{Z}_0$ costuma dar-se a designação de *Impedância Característica da Linha.*

A impedância característica de uma linha representa portanto, no caso geral, o cociente das amplitudes complexas das ondas incidentes da tensão e da corrente em qualquer ponto da linha.

Calculemos agora o cociente das amplitudes complexas das ondas reflectidas da tensão e da corrente.

Teremos assim

$$\frac{k_3\,\varepsilon^{-\gamma x}}{k_1\,\varepsilon^{-\gamma x}} = \frac{k_3}{k_1} = -\sqrt{\frac{R + j\,\omega\,L}{G + j\,\omega\,C}} = -\dot{Z}_0\,. \tag{1.46}$$

O cociente destas amplitudes complexas multiplicado por (-1) representa também a impedância característica da linha.

Por a impedância característica ter um significado físico definido para cada uma das ondas (incidente e reflectida), pode dar-se-lhe também a designação concreta de *Impedância Característica de Onda.*

É interessante analisar quais são as condições a que terão que obedecer os parâmetros da linha para que a impedância característica tenha um valor real. Da equação (1.45) se pode concluir fàcilmente que no caso de ser

$$L\,G = C\,R\,, \tag{1.47}$$

a impedância característica é um número real e será dada pelas expressões

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{1.48}$$

Veremos adiante que no caso de os parâmetros de uma linha obedecerem à condição (1.47) a linha se diz «sem distorção».

1.5 *Valores das constantes da linha, nalguns casos particulares*

Vejamos quais as expressões das constantes de propagação, de enfraquecimento e de comprimento de onda nalguns casos particulares da linha.

Caso da linha sem dissipação

Se admitirmos que $R = O$ e $G = O$, isto é, que é desprezível a resistência óhmica dos condutores da linha e que é infinita a resistência de isolamento entre condutores, concluiremos que

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}\,. \tag{1.49}$$

Neste caso, a constante de propagação é um imaginário puro.

A impedância característica será dada pela expressão

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\,, \tag{1.50}$$

o que mostra que, neste caso, será um número real.

Caso de ser $G = O$ e R muito pequeno

Neste caso, despreza-se completamente o valor da condutância de isolamento e considera-se que o valor de R é muito pequeno comparado com o valor de ω L.

Por ser $G = O$ resulta

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\,C\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega^2 L\,C} \tag{1.51}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\,C\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 L\,C}\,. \tag{1.52}$$

Por ser

$$\sqrt{R^2 + \omega^2\,L^2} = \omega\,L\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2\,L^2}}\,,$$

e desenvolvendo em série

$$\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2\,L^2}} = 1 + \frac{R^2}{2\,\omega^2\,L^2} + \cdots,$$

teremos $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \simeq \omega\,L + \dfrac{R^2}{2\,\omega\,L}$, expres-

são tanto mais exacta quanto maior for ωL comparada com R.

Será, portanto, dentro da aproximação referida,

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C\,(4\,\omega^2\,L^2 + R^2)}{2\,L}}$$

O valor de β, para o caso de R^2 muito pequeno em relação a $4\,\omega^2\,L^2$, pode ainda escrever-se

$$\beta = \omega\sqrt{L\,C}\,,$$

expressão que já tínhamos encontrado para o caso da linha não dissipativa.

Podemos portanto concluir que para o caso de uma linha sem perdas no isolamento e com fraca resistência óhmica, as constantes de enfraquecimento e de comprimento de onda são dadas pelas equações

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (1.53)$$

$$\beta = \omega\sqrt{L\,C}\,, \qquad (1.54)$$

que nos mostram que numa linha com as condições apontadas, o enfraquecimento será directamente proporcional à resistência óhmica e à raiz quadrada da capacidade e inversamente proporcional à raiz quadrada de L; é portanto de esperar que, até um certo limite, aumentando o valor de L da linha se diminua o enfraquecimento.

Caso de R e G serem muito pequenos mas diferentes de zero

Se nas expressões (1.34) e (1.35) considerarmos o desenvolvimento em série de Newton de

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \omega\,L + \frac{R^2}{2\,\omega\,L} - \frac{R^4}{8\,\omega^3\,L^3} + \ldots$$

$$\sqrt{G^2 + \omega^2\,C^2} = \omega\,C + \frac{G^2}{2\,\omega\,C} - \frac{G^4}{8\,\omega^3\,C^3} + \ldots$$

Concluímos

$$\alpha \cong \left(\frac{R}{2} + \frac{L\,G}{2\,C}\right)\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (1.55)$$

$$\beta \cong \omega\sqrt{L\,C} \qquad (1.56)$$

Estas expressões (1.55) e (1.56) são muito usadas para calcular ràpidamente os valores aproximados das constantes de enfraquecimento e de comprimento de onda de uma linha.

A fórmula (1.55) reduz-se naturalmente à fórmula (1.53) para o caso de ser $G = 0$.

Caso da linha sem distorção. Impedância característica real

Vimos já que se designava por linha sem distorção uma linha cuja impedância característica era um número real, e para a qual, portanto, se verificava a condição

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}\,. \qquad (1.57)$$

Os valores de α e β, dados no caso geral pelas equações (1.34) e (1.35) tomarão agora os seguintes valores

$$\alpha = \sqrt{RC} \qquad (1.58)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}\,. \qquad (1.59)$$

Vemos assim, a partir de (1.58), que neste caso da linha sem distorção, o valor da constante de enfraquecimento é independente da frequência.

A partir da equação (1.59) nós concluímos também que a velocidade de propagação da onda numa linha nestas condições é dada pela expressão

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (1.60)$$

e é portanto também independente da frequência.

Tínhamos já encontrado que, para uma linha nestas condições, a impedância característica é dada pela relação (1.48)

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

o que mostra que neste caso também a impedância característica da linha é independente da frequência.

O caso da linha sem dissipação a que atrás nos referimos é, evidentemente, um caso particular de linha sem distorção pois que α é nulo e v é independente da frequência.

Parece-nos contudo interessante notar que os parâmetros da linha R, G, L e C não serão, em geral, rigorosamente constantes com a frequência, isso devido principalmente ao efeito de pele; portanto as conclusões acima referidas devem ser tomadas com esta restrição.

A importância prática da ausência de distorção é evidente pois que, se o coeficiente de enfraquecimento e a velocidade de propagação forem independentes da frequência, qualquer onda sinusoidal de qualquer frequência se propaga ao longo da linha nas mesmas condições sob o ponto de vista das variações de amplitude e de fase. Se repararmos que qualquer «sinal» a transmitir por uma linha se pode sempre decompor num Integral de Fourier, e pode portanto ser considerado como resultante de um espectro de frequências determinado, avaliamos imediatamente a grande importância prática do facto de uma linha se comportar de uma maneira idêntica para todas as frequências. Nestas circunstâncias, a configuração do espectro de frequências ao longo da linha não é alterado e portanto o sinal é transmitido sem mudança de forma e assim sem distorção.

Consideremos, por exemplo, o caso simples de o sinal a transmitir ser uma função periódica, portanto susceptível de desenvolvimento em série de Fourier e incluindo assim funções sinusoidais de diferentes frequências e desfasagens. Se estas harmónicas sofrerem ao longo da linha enfraquecimentos diferentes, o sinal a transmitir sofrerá uma «distorção de amplitude». Se além disso as velocidades de propagação forem diferentes para as diferentes harmónicas do sinal, este sofrerá uma «distorção de fase». É ainda evidente que o fenómeno da distorção será sobretudo importante na Técnica das Comunicações, onde se requere fidelidade na transmissão do sinal.

2.0 Linha infinita

No capítulo anterior deduzimos as equações de variação da tensão e da corrente ao longo da linha e em relação ao tempo, independentemente das condições de terminação da linha; definimos ainda alguns dos conceitos fundamentais da teoria das linhas de transmissão.

Consideremos agora o caso ideal de uma linha infinita. O estudo deste caso tem um interesse especial em virtude das seguintes razões fundamentais:

— uma linha real, terminada por uma impedância igual à sua impedância característica, comporta-se, como adiante veremos, do mesmo modo que uma linha infinita;

— há linhas reais tão longas que, pràticamente, em certas circunstâncias, se comportam como se fossem linhas infinitas.

Consideremos portanto uma linha infinita em cuja origem se aplicaria uma tensão alternada sinusoidal de amplitude complexa $\dot{E}_k$ e frequência ω.

Calculemos para este caso, o valor dos coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4 que aparecem nas equações (1.36) e (1.37), respectivamente da variação da corrente e da tensão ao longo da linha e em relação ao tempo. Como já atrás referimos, estes coeficientes serão determinados a partir do conhecimento das condições iniciais e terminais da linha.

Se considerarmos que quando o valor de x tende para infinito os valores da tensão e da corrente não podem, numa linha real, por razões de ordem física, tornar-se infinitos, concluímos imediatamente que, no caso da linha infinita, terá de ser

$$k_1 = 0 \text{ e } k_3 = 0.$$

Neste caso, portanto, as equações (1.36) e (1.37) resumem-se a

$$i(x, t) = k_2 \, \varepsilon^{-\gamma x} \, \varepsilon^{j\omega t} \qquad (2.1)$$

$$e(x, t) = k_4 \, \varepsilon^{-\gamma x} \, \varepsilon^{j\omega t} \qquad (2.2)$$

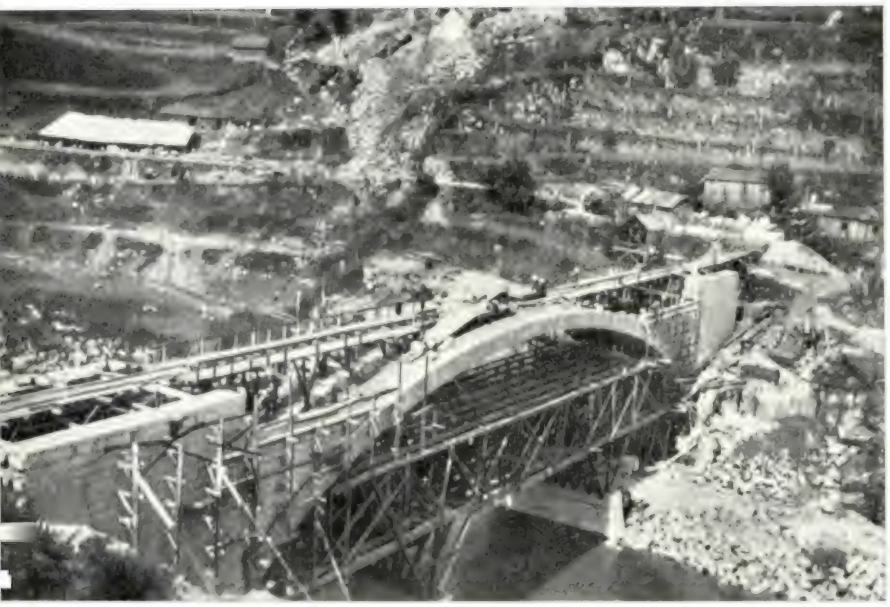
o que mostra que, neste caso, existem apenas as ondas incidentes da corrente e da tensão.

PONTE DE ORVALHO

BIBLIOTECA IST

Sobre o rio Zêzere, na E. N. 112, com um comprimento total de 114 m, é constituída por 3 arcos de betão armado, encastrados em pilares e encontro de betão simples, com o vão de 30,10 m e flecha de 8,39 m, sendo os tímpanos cheios e formados por muros de betão simples

PONTE DE ABRAGÃO



Sobre o rio Tâmega, na E. N. 320, com um comprimento total de 111 m, e constituída por uma abóbada de cantaria, com 60 m de vão e 9 m de flecha

Esta abóbada, abatida, encastrada e de tímpanos cheios, é a maior deste tipo, construída no País, com o material indicado

Veremos adiante, ao estudarmos as condições de terminação de uma linha finita, que a amplitude da onda reflectida depende da amplitude da onda incidente na extremidade de terminação da linha; veremos em pormenor que o cociente das amplitudes complexas da onda reflectida e da onda incidente de tensão na extremidade de terminação da linha é designado por «coeficiente de reflexão» e que o módulo deste coeficiente não pode ser superior à unidade. É assim evidente, sob o ponto de vista físico, que numa linha infinita, o enfraquecimento reduzirá progressivamente as amplitudes das ondas incidentes de tensão e de corrente de tal modo que o fenómeno de reflexão não poderá ter lugar.

Podemos ainda verificar que as constantes k_4 e k_2 representam nas equações (2.1) e (2.2) respectivamente os valores das amplitudes complexas da tensão e da corrente na origem da linha.

As equações (2.1) e (2.2) mostram-nos ainda que, para qualquer valor de x ao longo da linha, o cociente das amplitudes complexas da tensão e da corrente

$$\frac{\dot{E}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{k_4\,\varepsilon^{-\gamma x}}{k_2\,\varepsilon^{-\gamma x}} = \frac{k_4}{k_2} = \dot{Z}_o \qquad (2.3)$$

tem um valor constante, que já tínhamos encontrado na equação (1.45) quando calculámos o cociente das amplitudes complexas das ondas incidentes da tensão e da corrente, no caso geral. Este valor é, neste caso, constante e igual à impedância característica da linha.

As equações gerais de variação da tensão e da corrente ao longo de uma linha infinita a cuja origem se aplica uma tensão alternada sinusoidal de amplitude complexa $\dot{E}_k$ e frequência ω são portanto as seguintes:

$$e(x, t) = \dot{E}_k\,\varepsilon^{-\gamma x}\,\varepsilon^{j\omega t} \qquad (2.4)$$

$$i(x, t) = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o}\,\varepsilon^{-\gamma x}\,\varepsilon^{j\omega t}\,. \qquad (2.5)$$

3.0 Linha finita

3.1 *Equações Gerais*

Consideremos o caso concreto de uma linha finita, dando agora especial atenção às suas condições de terminação.

Designemos por $\dot{E}_k$ e $\dot{I}_k$ respectivamente as amplitudes complexas da tensão e da corrente na origem da linha. Seja l o comprimento da linha e $\dot{Z}_r$ a impedância de terminação da linha. Designemos ainda por $\dot{E}_l$ e $\dot{I}_l$ respectivamente as amplitudes complexas da tensão e da corrente na extremidade de terminação da linha.

Das equações (1.36) e (1.37) e tendo em atenção as expressões (1.45) e (1.46) resultam as equações

$$i(x, t) = (k_2\,\varepsilon^{-\gamma x} + k_1\,\varepsilon^{\gamma x})\,\varepsilon^{j\omega t} \qquad (3.1)$$

$$e(x, t) = (k_2\,\dot{Z}_o\,\varepsilon^{-\gamma x} - k_1\,\dot{Z}_o\,\varepsilon^{\gamma x})\,\varepsilon^{j\omega t}\,. \qquad (3.2)$$

Os valores de k_1 e k_2 poderão ser determinados a partir das condições iniciais e terminais da linha.

Teremos assim

$$\dot{I}_k = k_2 + k_1 \qquad (3.3)$$

$$\dot{E}_k = \dot{Z}_o\,(k_2 - k_1). \qquad (3.4)$$

de onde se podem deduzir os seguintes valores para k_1 e k_2

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\dot{I}_k - \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o}\right) \qquad (3.5)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{I}_k + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_o}\right). \qquad (3.6)$$

Das expressões

$$\dot{I}_l = k_2\,\varepsilon^{-\gamma l} + k_1\,\varepsilon^{\gamma l} \qquad (3.7)$$

$$\dot{E}_l = k_2\,\dot{Z}_o\,\varepsilon^{-\gamma l} - k_1\,\dot{Z}_o\,\varepsilon^{\gamma l} \qquad (3.8)$$

poder-se-iam concluir os seguintes valores de k_1 e k_2

$$k_1 = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-\gamma l}\left(\dot{I}_l - \frac{\dot{E}_l}{\dot{Z}_o}\right) \qquad (3.9)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\gamma l}\left(\dot{I}_l + \frac{\dot{E}_l}{\dot{Z}_o}\right). \qquad (3.10)$$

Tendo em atenção os valores de k_1 e k_2 dados pelas equações (3.5) e (3.6), as equaçoes (1.36) e (1.37) poderiam escrever-se sob a seguinte forma

$$i\,(x, t) = \left(\dot{I}_k \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \operatorname{sh} \gamma x\right) \varepsilon^{j\omega t} \qquad (3.11)$$

$$e\,(x, t) = (\dot{E}_k \operatorname{ch} \gamma x - \dot{I}_k \dot{Z}_o \operatorname{sh} \gamma x)\, \varepsilon^{j\omega t}. \qquad (3.12)$$

Se tomarmos em consideração os valores de k_1 e k_2 dados pelas equações (3.9) e (3.10) as equações (1.36) e (1.37) poderiam transformar-se em

$$i\,(x, t) = \left[\dot{I}_l \operatorname{ch}(l-x) + \frac{\dot{E}_l}{\dot{Z}_o} \operatorname{sh}(l-x)\right] \varepsilon^{j\omega t} \qquad (3.13)$$

$$e\,(x, t) = \left[\dot{E}_l \operatorname{ch}(l-x) + \dot{I}_l Z_o \operatorname{sh}(l-x)\right] \varepsilon^{j\omega t} \qquad (3.14)$$

As equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) têm a desvantagem de não mostrarem com nitidez quais as amplitudes complexas das ondas incidente e reflectida da corrente e da tensão.

3.2 *Coeficiente de reflexão da linha*

Vimos já que, no caso geral, quer a tensão quer a corrente ao longo da linha, se podem considerar como o resultado da sobreposição de duas ondas que designámos por onda incidente e onda reflectida. Analisemos o que se passa com a tensão; como já vimos, as amplitudes complexas da onda incidente e onde reflectida são respectivamente dadas pelas expressões

$$(k_2 \dot{Z}_o\, \varepsilon^{-\gamma x}) \quad \text{e} \quad (-\, k_1 Z_o \varepsilon^{\gamma x}),$$

de tal modo que a amplitude complexa da tensão é dada pela expressão

$$\dot{E}\,(x) = k_2 \dot{Z}_o\, \varepsilon^{-\gamma x} - k_1 \dot{Z}_o\, \varepsilon^{\gamma x}.$$

Calculemos o cociente dos valores das amplitudes complexas da onda reflectida e da onda incidente da tensão, para $x = l$, isto é, na extremidade de terminação da linha.

Será então

$$\frac{-\, k_1 \dot{Z}_o\, \varepsilon^{\gamma l}}{k_2 \dot{Z}_o\, \varepsilon^{-\gamma l}} = -\,\frac{k_1}{k_2}\,\varepsilon^{2\gamma l} = \frac{k_3}{k_4}\,\varepsilon^{2\gamma l} = K. \qquad (3.15)$$

A este cociente dá-se o nome de *Coeficiente de Reflexão da Linha* relativo à tensão e é, neste estudo, designado pela letra K. O seu significado físico fica assim claramente definido.

Poderemos ainda notar que o cociente dos valores das amplitudes complexas da onda reflectida e da onda incidente da corrente, para $x = l$, é igual ao coeficiente de reflexão tomado com o sinal contrário.

Substituamos agora na equação (3.15) os valores de k_1 e k_2 dados pelas equações (3.9) e (3.10).

Teremos assim

$$K = \frac{\dfrac{\dot{E}_l}{\dot{I}_l} - \dot{Z}_o}{\dfrac{\dot{E}_l}{\dot{I}_l} + \dot{Z}_o} = \frac{\dot{Z}_r - \dot{Z}_o}{\dot{Z}_r + \dot{Z}_o}, \qquad (3.16)$$

se atendermos que

$$\dot{Z}_r = \frac{\dot{E}_l}{\dot{I}_l}.$$

Vemos assim que o valor do coeficiente de reflexão da linha depende apenas da impedância característica e da impedância de terminação da linha. No caso de $\dot{Z}_o$ e $\dot{Z}_r$ serem complexas, o valor de K será em geral um número complexo excepto ùnicamente quando $\dot{Z}_o$ e $\dot{Z}_r$ tiverem o mesmo ângulo de fase, pois que neste caso K seria um número real. Poderemos ainda verificar que, no caso de K ser um número complexo, quer a onda de tensão quer a onda de corrente são reflectidas com uma variação de fase igual ao ângulo de fase de K e com uma variação de amplitude que depende da amplitude de K. No caso da linha ser terminada por uma impedância passiva, como temos vindo considerando, a ampli-

tude de K não poderá ser superior à unidade.

No caso de $\dot{Z}_r$ e $\dot{Z}_o$ serem números reais, o coeficiente de reflexão será também um número real; será negativo se $\dot{Z}_r$ for menor do que $\dot{Z}_o$ e neste caso a onda de tensão é reflectida com uma mudança de sinal enquanto que a onda de corrente é reflectida sem mudança de sinal; o coeficiente de reflexão será positivo se $\dot{Z}_r$ for maior que $\dot{Z}_o$ e neste caso a onda de tensão é reflectida sem mudar o sinal, enquanto que a onda de corrente é reflectida com mudança de sinal.

3.3 *Impedância da linha vista da origem*

Das equações (3.3) e (3.4) se conclui imediatamente que a impedância da linha, vista da origem, que designaremos por $\dot{Z}$ será dada pela relação

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{I}_k} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\,\dot{Z}_o\,. \qquad (3.17)$$

Tendo em atenção as equações (3.15) e (3.16) que definem o coeficiente de reflexão da linha poderemos escrever

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o \frac{1 + \varepsilon^{-2\gamma l}\,\dfrac{\dot{Z}_r - \dot{Z}_o}{\dot{Z}_r + \dot{Z}_o}}{1 - \varepsilon^{-2\gamma l}\,\dfrac{\dot{Z}_r - \dot{Z}_o}{\dot{Z}_r + \dot{Z}_o}}$$

que, por transformações simples, conduz à equação

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o \frac{\dot{Z}_o\,(\varepsilon^{\gamma l} - \varepsilon^{-\gamma l}) + \dot{Z}_r\,(\varepsilon^{\gamma l} + \varepsilon^{-\gamma l})}{\dot{Z}_o\,(\varepsilon^{\gamma l} + \varepsilon^{-\gamma l}) + \dot{Z}_r\,(\varepsilon^{\gamma l} - \varepsilon^{-\gamma l})}$$

donde se conclui imediatamente

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o \frac{\dot{Z}_o \operatorname{sh} \gamma l + \dot{Z}_r \operatorname{ch} \gamma l}{\dot{Z}_o \operatorname{ch} \gamma l + \dot{Z}_r \operatorname{sh} \gamma l} \qquad (3.18)$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o \frac{\dot{Z}_o \operatorname{tgh} \gamma l + \dot{Z}_r}{\dot{Z}_o + \dot{Z}_r \operatorname{tgh} \gamma l} \qquad (3.19)$$

Temos assim o valor da impedância da linha vista da origem, expressa em função da impedância característica da linha, da impedância de terminação, do comprimento e da constante de propagação.

3.4 *Linha terminada por uma impedância igual à sua impedância característica*

Consideremos uma linha finita de comprimento l em que $\dot{Z}_r = \dot{Z}_o$. Atendendo às equações (3.15) e 3.16) que definem o coeficiente de reflexão da linha concluímos imediatamente que este coeficiente é nulo e que, portanto, neste caso, não haverá ondas reflectidas de tensão e de corrente. Serão ainda nulos os coeficientes k_1 e k_3 e serão portanto válidas as equações deduzidas no capítulo (2.0) para o caso ideal da linha infinita.

3.5 *Linha em circuito aberto*

Consideremos uma linha de comprimento l, em circuito aberto na sua extremidade de terminação. Da equação (3.19) se conclui que a impedância vista da origem que, neste caso, designaremos por $\dot{Z}_a$, será dada pela expressão

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_o \operatorname{cotgh} \gamma l. \qquad (3.20)$$

O coeficiente de reflexão será igual à unidade, de onde se conclui que a onda de tensão é reflectida sem mudança de sinal e de amplitude.

A partir das condições iniciais e terminais poderão determinar-se os valores de k_1 e k_2. Supondo conhecidos os valores da tensão aplicada na origem da linha e dos parâmetros da linha, os valores de k_1 e k_2 serão dadas pelas equações

$$k_1 = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{-\varepsilon^{-2\gamma l}}{\varepsilon^{-2\gamma l}+1} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{\operatorname{tgh} \gamma l - 1}{2} \tag{3.21}$$

$$k_2 = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{1}{\varepsilon^{-2\gamma l}+1} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{\operatorname{tgh} \gamma l + 1}{2} . \tag{3.22}$$

As equações de variação da corrente e da tensão ao longo da linha e em relação ao tempo serão dadas pelas expressões

$$i(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{1}{\varepsilon^{-2\gamma l}+1} \left[\varepsilon^{-\gamma x} - \varepsilon^{\gamma (x-2l)} \right] \varepsilon^{j\omega t}, \tag{3.23}$$

$$e(x,t) = \dot{E}_k \frac{1}{\varepsilon^{-2\gamma l}+1} \left[\varepsilon^{-\gamma x} + \varepsilon^{\gamma (x-2l)} \right] \varepsilon^{j\omega t}, \tag{3.24}$$

ou ainda pelas expressões

$$i(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \left(\frac{\operatorname{tgh} \gamma l + 1}{2} \varepsilon^{-\gamma x} + \frac{\operatorname{tgh} \gamma l - 1}{2} \varepsilon^{\gamma x} \right) \varepsilon^{j\omega t}, \tag{3.25}$$

$$e(x,t) = \dot{E}_k \left(\frac{\operatorname{tgh} \gamma l + 1}{2} \varepsilon^{-\gamma x} - \frac{\operatorname{tgh} \gamma l - 1}{2} \varepsilon^{\gamma x} \right) \varepsilon^{j\omega t}. \tag{3.26}$$

Estas expressões têm a vantagem de mostrarem as expressões da onda incidente e da onda reflectida ao longo da linha.

3.6 *Linha em curto circuito*

Seja uma linha de comprimento l, curto-circuitada na sua extremidade de terminação. Da equação (3.19) se conclui que a impedância vista da origem, neste caso designada por $\dot{Z}_c$, será dada pela expressão

$$\dot{Z}_c = Z_o \operatorname{tgh} \gamma l . \tag{3.27}$$

O coeficiente de reflexão será agora igual a (— 1) o que significa que a onda de corrente se reflecte sem mudança de sinal e de amplitude.

Os valores de k_1 e k_2 serão, neste caso, dados pelas expressões

$$k_1 = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{\varepsilon^{-2\gamma l}}{1-\varepsilon^{-2\gamma l}} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{\operatorname{cotgh} \gamma l - 1}{2} \tag{3.28}$$

$$k_2 = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{1}{1-\varepsilon^{-2\gamma l}} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{\operatorname{cotgh} \gamma l + 1}{2} . \tag{3.29}$$

As expressões de variação da corrente e da tensão ao longo da linha serão

$$i(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{\dot{Z}_o} \frac{1}{1-\varepsilon^{-2\gamma l}} \left[\varepsilon^{-\gamma x} + \varepsilon^{\gamma (x-2l)} \right] \varepsilon^{j\omega t} \tag{3.30}$$

$$e(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{1-\varepsilon^{-2\gamma l}} \left[\varepsilon^{-\gamma x} - \varepsilon^{\gamma (x-2l)} \right] \varepsilon^{j\omega t}, \tag{3.31}$$

ou ainda

$$i(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{2\dot{Z}_o} \left[(\operatorname{cotgh} \gamma l + 1)\, \varepsilon^{-\gamma x} + (\operatorname{cotgh} \gamma l - 1)\, \varepsilon^{\gamma x} \right] \varepsilon^{j\omega t} \tag{3.32}$$

$$e(x,t) = \frac{\dot{E}_k}{2} \left[(\operatorname{cotgh} \gamma l + 1)\, \varepsilon^{-\gamma x} - (\operatorname{cotgh} \gamma l - 1)\, \varepsilon^{\gamma x} \right] \varepsilon^{j\omega t}. \tag{3.33}$$

3.7 *Relação entre $\dot{Z}_o$, $\dot{Z}_a$ e $\dot{Z}_c$*

Multiplicando termo a termo as equações (3.20) e (3.27) concluiremos imediatamente

$$\dot{Z}_o = \sqrt{\dot{Z}_a \; \dot{Z}_c} \tag{3.34}$$

expressão que nos diz que a impedância característica de uma linha é a média geométrica das impedâncias da linha em circuito aberto e em curto-circuito, qualquer

que seja o comprimento l da linha considerada. Esta conclusão é muito importante sob o ponto de vista experimental, pois significará um método de medição da impedância característica da linha, $\dot{Z}_o$, a partir das medições de $\dot{Z}_a$ e $\dot{Z}_c$.

3.8 *Linha de Quarto de Onda e Linha de Meia Onda*

O estudo que vimos fazendo neste Capítulo tem considerado sempre o caso geral de uma linha de comprimento l qualquer. Consideremos agora os dois casos particulares de ser

$$\beta l = 90^\circ$$

e

$$\beta l = 180^\circ .$$

Analisemos o que se passa, por exemplo, com a variação da amplitude complexa da onda de tensão nestes dois casos. É evidente que, ao longo da linha, o ângulo de fase dessa amplitude complexa varia respectivamente de 90° e de 180°. O mesmo se passa com a onda incidente de corrente e com as ondas reflectidas de tensão e de corrente. Diz-se nestes casos que a linha tem um comprimento de, respectivamente, 90 e 180 graus eléctricos. À linha nestas condições dá-se a designação de, respectivamente, «linha de quarto de onda» e «linha de meia onda».

Analisemos agora o comportamento de uma linha de quarto de onda não dissipativa.

Para uma linha nestas condições será, como é indicado nas equações (1.49) e (1.50):

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$\dot{Z}_o = \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Neste caso, a constante de propagação γ é um imaginário puro e igual a $j\beta$.

Seja $\dot{Z}_r$ a impedância de terminação da linha. A impedância vista da origem será, por transformação da equação (3.19) para o caso de $\gamma = +j\beta$,

$$\dot{Z} = \dot{Z}_o \frac{j\dot{Z}_o \operatorname{tg}\beta l + \dot{Z}_r}{\dot{Z}_o + j\dot{Z}_r \operatorname{tg}\beta l} . \qquad (3.35)$$

Se nesta equação considerarmos $\beta l = 90^\circ$ resultará imediatamente

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_o^2}{\dot{Z}_r} . \qquad (3.36)$$

Vemos assim que a impedância vista da origem de uma linha de quarto de onda, não dissipativa, se pode obter pelo cociente do quadrado da impedância característica pela impedância de terminação da linha. Vemos ainda que, no caso da impedância de terminação ser óhmica pura, também a impedância vista da origem será óhmica pura. No caso de $\dot{Z}r$ ser complexa, o argumento de $\dot{Z}$ será igual e de sinal contrário ao argumento de $\dot{Z}r$.

Isto significa que, se a impedância de terminação tiver carácter indutivo, a impedância vista da origem terá carácter capacitivo e vice-versa. Vemos ainda que uma linha de quarto de onda, não dissipativa, curto-circuitada na sua terminação, apresenta uma impedância infinita vista da origem. Quando a sua terminação estiver em circuito aberto, a impedância vista da origem será nula.

Analisemos agora o comportamento de uma linha de meia onda, não dissipativa, para diferentes condições de terminação. Se na equação (3.35) fizermos $\beta l = 180^\circ$ resultará imediatamente

$$\dot{Z} = \dot{Z}r ,$$

o que mostra que, qualquer que seja o valor da impedância característica, a linha de meia onda não dissipativa, apresenta na origem uma impedância igual à impedância de terminação.

(Continua)

CENTRIFUGAÇÃO

PELO ENG.º QUÍMICO INDUSTRIAL LUÍS A. DE ALMEIDA ALVES
Assistente do I. S. T.

C. D. 66.066.4

Introdução

No artigo sobre «Sedimentação. Espessamento», estudou-se a possibilidade de utilizar a força centrífuga, substituindo a da gravidade, na separação de sólidos de gases, de modo a conseguir efectuar a separação mais eficientemente e com o emprego de aparelhagem de dimensões mais reduzidas (ciclones em vez de câmaras de sedimentação).

O estudo completo do problema consiste em estudar a possibilidade de separação de várias fases distintas, pelo emprego da força centrífuga (operação que tem o nome de centrifugação), substituindo, deste modo, a *separação por densidades* (para a separação de sólidos de densidades diferentes) a *sedimentação* (para sólidos, de líquidos) e a *decantação*(1) (para líquidos de diferentes densidades).

Sob o ponto de vista teórico, os dois primeiros casos estudam-se a partir da resistência oposta por um líquido ao movimento de sólidos em suspensão, e o terceiro trata-se a partir do estudo hidrostático de dois líquidos submetidos à acção da força centrífuga; por isso, estes dois aspectos do problema vão ser considerados separadamente.

Em qualquer dos casos, a centrifugação efectua-se em centrífugas.

CAPITULO I

CENTRIFUGAÇÃO DE LÍQUIDOS COM SÓLIDOS EM SUSPENSÃO

a) *Generalidades*

Como se sabe do artigo sobre «Sedimentação. Espessamento», a velocidade de deslocamento, em movimento viscoso, de um sólido através de um fluido, devida à força centrífuga, é dada pela expressão

$$U = \frac{D^2 \omega^2 r (\rho - \rho_0)}{18 \mu},$$

desprezando a influência da gravidade.

Para realizar a separação das partículas é necessário que estas percorram um caminho tal que o tempo de percurso seja igual ao de passagem do líquido através da centrífuga, o qual se efectua como se indica na figura 1.

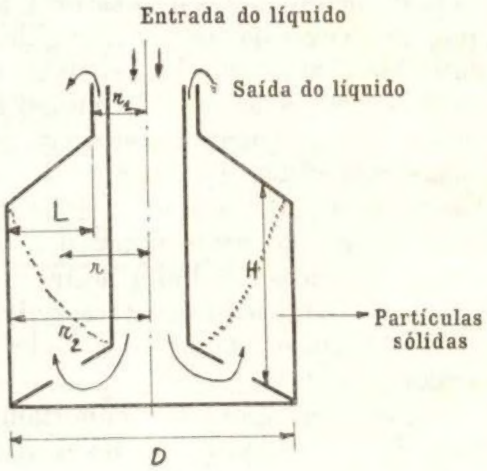


Fig. 1

Se for V a velocidade do líquido, o tempo de passagem será

$$t = \frac{H}{V}$$

Por outro lado, como o deslocamento das partículas se efectua radialmente, será

$$dr = U\, dt$$

e, portanto,

(1) A decantação será estudada posteriormente.

$$t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{U} = \frac{18\,\mu}{D^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{18\,\mu}{D^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)} \log \frac{r_2}{r_1}$$

Igualando os dois valores de t, ter-se-á

$$\frac{H}{V} = \frac{18\,\mu}{D^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)} \log \frac{r_2}{r_1}$$

Sendo Q o caudal, será

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi\,(r_2^2 - r_1^2)}$$

Portanto,

$$Q = \frac{\pi\,HD^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)\,(r_2^2 - r_1^2)}{18\,\mu \log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi\,HD^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)\,(r_2^2 - r_1^2)}{41{,}5\,\mu \log_{10} \frac{r_2}{r_1}} \quad (1)$$

b) *Caso de movimento não viscoso*

Como se sabe do artigo sobre «Classificação», o movimento só é viscoso, quando o número de Reynolds N está compreendido entre 0,0001 e 2. Como se sabe, também, para movimento turbulento ($500 < N < 200.000$) e movimento intermediário ($2 < N < 500$), as expressões da velocidade, no caso da gravidade são respectivamente

$$U = \sqrt{\frac{4\,gD\,(\gamma - \gamma_0)}{3\,K\,\gamma_0}} = \sqrt{\frac{8\,gD\,(\gamma - \gamma_0)}{3\,\gamma_0}}$$

(visto que $K \sim 0{,}5$)

e

$$U = \frac{0{,}153\,g^{0{,}71}\,D^{1{,}14}\,(\rho - \rho_0)^{0{,}71}}{\rho^{0{,}29}\,\mu^{0{,}43}}$$

Substituindo g por $\omega^2\,r$, estas expressões transformam-se nas seguintes:

$$U = \sqrt{\frac{8\,D\,\omega^2\,r\,(\gamma - \gamma_0)}{3\,\gamma_0}}\,,$$

e

$$U = \frac{0{,}153\,\omega^{1{,}42}\,r^{0{,}71}\,D^{1{,}14}\,(\rho - \rho_0)^{0{,}71}}{\rho^{0{,}29}\,\mu^{0{,}43}}$$

Substituindo estes valores, na expressão do tempo, ter-se-á

1) *Movimento turbulento*

$$t = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{U} = \sqrt{\frac{3\,\gamma_0}{8\,D\,\omega^2\,(\gamma - \gamma_0)}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{r}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{3\,\gamma_0}{8\,D\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)}} \left(r_2^{1/2} - r_1^{1/2}\right)$$

Igualando a

$$t = \frac{H}{V} = \frac{\pi\,H\,(r_2^2 - r_1^2)}{Q}\,,$$

vem

$$Q = \frac{\pi\,H\,(r_2^2 - r_1^2)}{2\,(r_2^{1/2} - r_1^{1/2})} \sqrt{\frac{8\,D\,\omega^2\,(\gamma - \gamma_0)}{3\,\gamma_0}} \quad (1)$$

---

(1) Esta expressão aparece, por vezes, com aspecto diferente.

Como se sabe do estudo da Extracção, a média logarítmica r_m de r_2 e r_1 é dada pela expressão

$$r_m = \frac{r_2 - r_1}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

Portanto,

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_m}$$

Substituindo a média logarítmica r_m pela média aritmética $\frac{r_2 + r_1}{2}$, vem

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\,(r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} = \frac{2\,(r_2 - r_1)^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Substituindo na expressão de Q, ter-se-á, finalmente,

$$Q = \frac{\pi\,HD^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)\,(r_2^2 - r_2^2)^2}{36\,\mu\,(r_2 - r_1)^2}$$

Se r_1 for pequeno em relação a r_2 será

$$Q = \frac{\pi\,HD^2\,\omega^2\,(\rho - \rho_0)\,r_2^2}{36\,\mu}$$

(1) Esta expressão aparece, por vezes, com aspecto diferente.

Multipliquemos o numerador e o denominador por

$$A = \left(r_2^{1/2} + r_1^{1/2}\right)(r_2 - r_1) = \left(r_2^{3/2} - r_1^{3/2}\right) +$$

$$+ \sqrt{r_1\,r_2}\left(r_2^{1/2} - r_1^{1/2}\right)$$

Substituindo a média geométrica $\sqrt{r_1\,r_2}$ pela média